INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 11 (elleve)
Eksamensdag: Fredag den 17. juni 2016, kl. 9.00-13.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

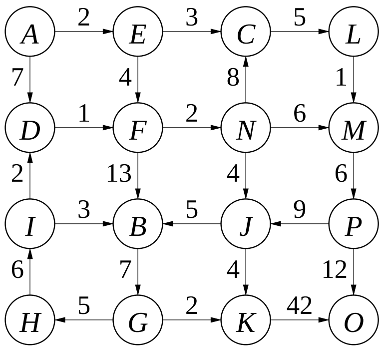
OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes sider til at angive svarene til opgave 1 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående vægtede orienterede graf. Det antages, at grafen er givet ved *incidenslister*, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

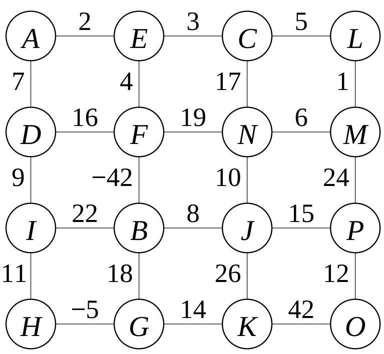


Spørgsmål a: Angiv et BFS-træ for ovenstående graf, hvor BFS-gennemløbet starter i **knuden** A. Angiv kanterne i BFS-træet, BFS-numrene for knuderne, og rækkefølgen knuderne bliver indsat i køen Q i BFS-algoritmen. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS-træ for ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i **knuden** A, og en DFS-nummerering af knuderne. Angiv for hver knude "discovery time" og "finishing time". Marker for hver kant om det er en "tree edge" (T), "back edge" (B), "cross edge" (C) eller "forward edge" (F). □

Spørgsmål c: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. For hver komponent angiv knuderne i komponenten. □

Spørgsmål d: Angiv et korteste veje (SSSP) træ for ovenstående graf, når korteste veje beregningen sker med hensyn til **startknuden** A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v, og angiv rækkefølgen knuderne tages ud af prioritetskøen Q i Dijkstra's algoritme. □

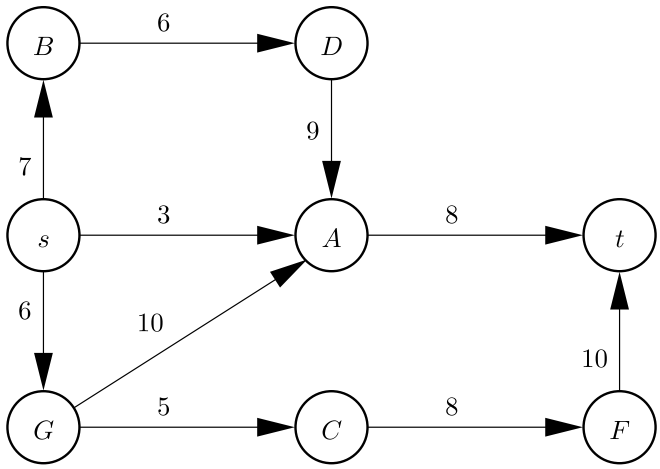


Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ (MST) for ovenstående uorienterede graf med vægte på kanterne. Angiv i hvilken rækkefølge knuderne bliver taget ud af prioritetskøen Q i Prim's algoritme, når denne starter i **knuden** A. □

Opgave 2 (15%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes en side til at angive svarene til opgave 2 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.



Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning (maximum flow) fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (cut) (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig værdien af en maksimal strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier (augmenting paths) der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen, man forbedrer med, langs stien. □

Opgave 3 (20%)

I denne opgave ønsker vi at udføre en mængde af J opgaver på M maskiner. Opgave j kan udføres på en delmængde $m_j \subseteq \{1, 2, \ldots, M\}$ af maskinerne, hvor $1 \leq j \leq J$. Hver maskine kan højest udføre én opgave per tidsskridt og hver opgave skal kun udføres én gang på én af maskinerne fra m_j.

F.eks. hvis $m_1 = \{1, 2, 3\}$, $m_2 = \{2, 3\}$, $m_3 = \{1, 2\}$, $m_4 = \{1, 3\}$, og $m_5 = \{1, 3\}$, så kan vi udføre opgaverne i to tidsskridt ved i første tidsskridt at udføre opgaverne 2, 3 og 4 på henholdsvis maskinerne 3, 2, og 1, og i det andet tidsskridt at udføre opgaverne 1 og 5 på henholdsvis maskinerne 1 og 3.

Spørgsmål a: Antag at hver opgave kun kan udføres på præcis en maskine, dvs. $|m_j| = 1$ for $1 \leq j \leq J$. Beskriv en algoritme, der finder det minimale antal tidsskridt, der skal til for at få udført de J jobs. Angiv algoritmens udførselstid. □

I de følgende delspørgsmål antages nu at hver opgave kan uføres på én eller flere maskiner, dvs. $m_j \subseteq \{1, 2, \ldots, M\}$ og $1 \leq |m_j| \leq M$.

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der finder det maksimale antal af de J opgaver, der kan udføres samtidigt på de M maskiner i ét tidsskridt. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der afgør om alle J opgaver kan blive udført i k tidsskridt, hvor k er en heltallig inputparameter. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål d: Beskriv en algoritme, der finder det minimale antal tidsskridt for at få udført alle J opgaver. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 4 (20%)

Lad S være n reelle tal $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, og c være et reelt tal, som vi i det følgende betegner et *center*. Den *totale afstand til centeret* beregnes som $d(S,c) = \sum_{i=1}^{n} |c - x_i|$. F.eks. er $d(\{2,4,7\},5) = |5-2| + |5-4| + |5-7| = 3+1+2 = 6$.

For en mængde $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ønsker vi at finde et center c, som minimerer den totale afstand $d(S,c)$ til centeret. Det kan vises at $c = x_{\lceil n/2 \rceil}$ er et sådan center. F.eks. for $S = \{2,4,7\}$ er $c = x_2 = 4$ et center, der opnår total afstand $d(S,c) = 5$, som er den mindst mulige totale afstand til et center for S.

Spørgsmål a: Angiv pseudokode for en metode $\textsc{MinDist}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, der beregner den minimale totale afstand til et center for $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, dvs. beregner $\min_{c \in \mathbb{R}} d(S,c)$. Angiv algoritmens udførselstid. □

I det følgende ønsker vi at dele $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ op i k disjunkte delmængder $S_1, \ldots, S_k$ med centre $c_1, \ldots, c_k$ således at $\sum_{j=1}^{k} d(S_j, c_j)$ er mindst mulig. F.eks. for $S = \{1,3,4,7,9\}$ og $k = 2$, er en løsning $S_1 = \{1,3,4\}$, $S_2 = 7,9$, $c_1 = 3$ og $c_2 = 7$.

Vi lader $\delta(i,j)$ betegne den mindst mulige afstand man kan opnå med j centre for tallene $x_1, \ldots, x_i$. $\delta(i,j)$ kan bestemmes ved følgende rekursionsformel, hvor $0 \leq i \leq n$ og $0 \leq j \leq k$.

$$\delta(i,j) = \begin{cases} \infty & \text{hvis } i > 0 \text{ og } j = 0 \\ 0 & \text{hvis } 0 \leq i \leq j \\ \min_{\ell=1,\ldots,i}(\delta(\ell-1, j-1) + \text{MinDist}(x_\ell, \ldots, x_i)) & \text{hvis } i > j > 0 \end{cases}$$

Spørgsmål b: Udfyld nedenstående tabel for $\delta(i,j)$, hvor $x_1, \ldots, x_n$ er $2, 5, 6, 11, 17, 19$ og $k = 3$.

$\delta(i,j)$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				

□

Spørgsmål c: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet n reelle tal $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ og et heltal k, beregner $\delta(n,k)$. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål d: Udvid algoritmen til at rapportere de k mængder $S_1, \ldots, S_k$ og centre $c_1, \ldots, c_k$, der har mindste total afstand $\delta(n,k)$ til de k centre. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 5 (20%)

Givet to strenge T_1 og T_2, begge af længde n, så er T_2 en *cyklisk rotation* af T_1, hvis der findes et k, $1 \leq k \leq n$, således at $T_2 = T_1[k+1..n]T_1[1..k]$. F.eks. er $T_2 =$ `deabc` en cyklisk rotation af $T_1 =$ `abcde` (med $k = 3$).

Vi siger at T_2 er en *cyklisk expansion* af T_1 hvis $|T_2| \geq |T_1|$ og T_2 er en delstreng af $T_1 T_1 \cdots T_1$ for et tilstrækkeligt antal konkatenationer af T_1.

F.eks. er strengen $T_2 =$ `bcdabcdabcdab` en cyklisk expansion af $T_1 =$ `abcd`. Bemærk at `bcd` og `ab` er henholdsvis et suffiks og et præfiks af `abcd`.

I det følgende kan det antages at strengene er over et alfabet med $O(1)$ tegn og at et suffikstræ for en streng af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål a: Beskriv en algoritme, der givet to strenge T_1 og T_2, begge af længde n, afgør om T_2 er en rotation af T_1. Angiv algoritmens udførselstid. En ideel løsning opnår udførselstid $O(n)$. $\square$

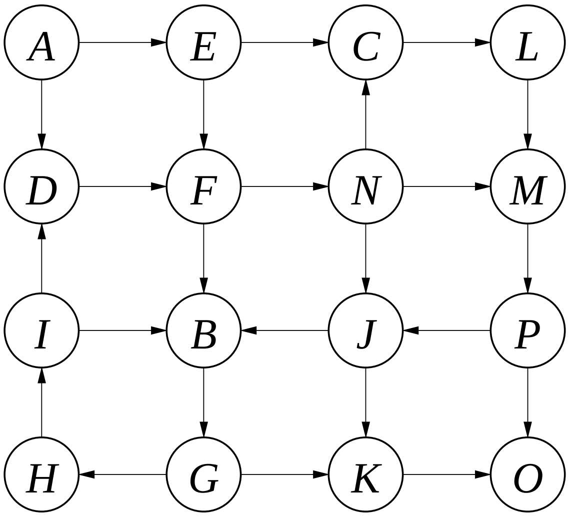
Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der givet to strenge T_1 og T_2, henholdsvis af længde n og m, hvor $n \leq m$, afgør om T_2 er en cyklisk expansion af T_1. Angiv algoritmens udførselstid. En ideel løsning opnår udførselstid $O(n + m)$. $\square$

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der givet to strenge T_1 og T_2, henholdsvis af længde n og m, hvor $n \leq m$, finder en længste cyklisk expansion af T_1, som forekommer som en delstreng af T_2, eller rapporterer at sådan en cyklisk expansion ikke forekommer i T_2. Angiv algoritmens udførselstid. En ideel løsning opnår udførselstid $O(n + m)$. $\square$

Årskort:	Navn:

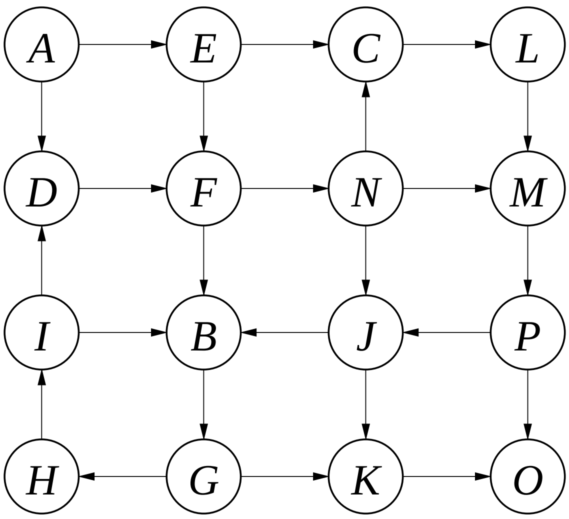
Opgave 1 — Svar

Spørgsmål a: BFS



Indsættelser i Q: ______________________________

Spørgsmål b: DFS



(blank side)

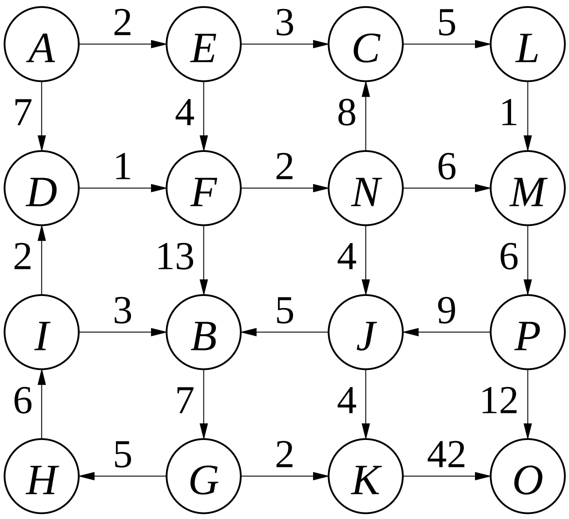
Årskort:	Navn:

Opgave 1 — Svar

Spørgsmål c:

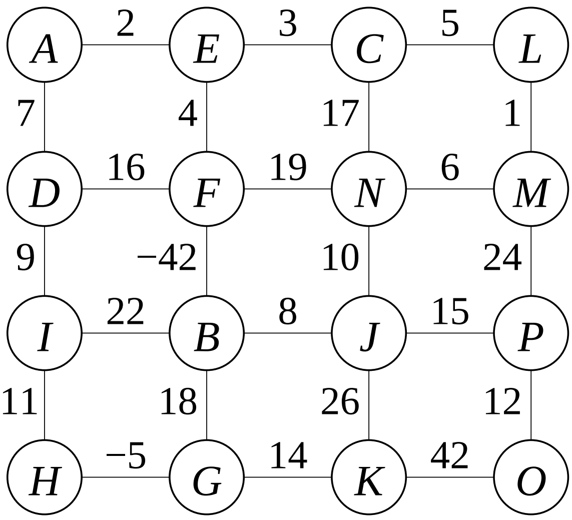
Stærke sammenhængskomponenter: ______________________

Spørgsmål d: SSSP



Udtagelse fra Q: ______________________

Spørgsmål e: MST



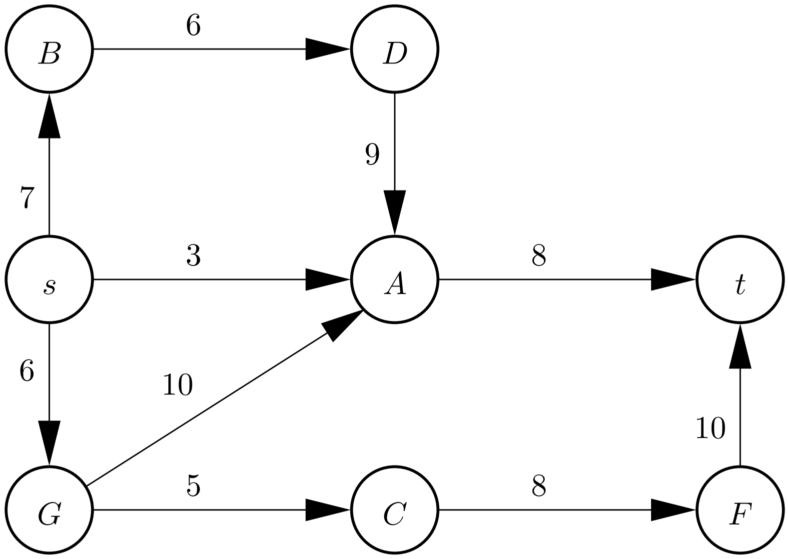
Udtagelse fra Q: ______________________

(blank side)

Årskort:	Navn:

Opgave 2 — Svar

Spørgsmål a:



Værdien af strømning: ______________________

Minimal snit: ______________________

Spørgsmål b:

Forbedring	Forbedrende sti