INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 11 (elleve)
Eksamensdag: Fredag den 22. august 2014, kl. 9.00-13.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

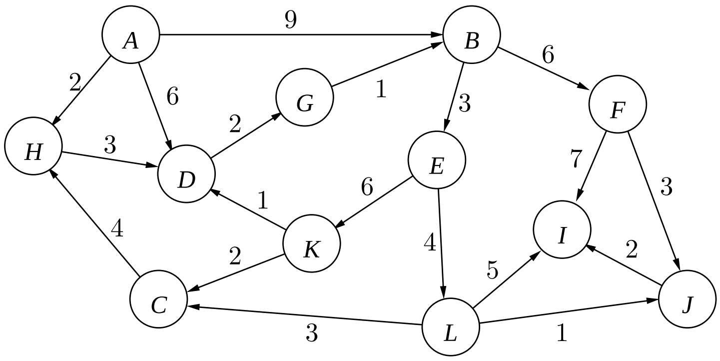
OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes sider til at angive svarene til opgave 1 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående vægtede orienterede graf. Det antages, at grafen er givet ved *incidenslister*, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

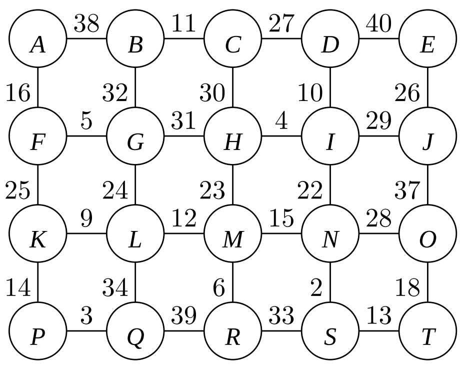


Spørgsmål a: Angiv et BFS-træ for ovenstående graf, hvor BFS-gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS-træet, BFS-numrene for knuderne, og rækkefølgen knuderne bliver indsat i køen Q i BFS-algoritmen. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS-træ for ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i knuden A, og en DFS-nummerering af knuderne. Angiv for hver knude "discovery time" og "finishing time". □

Spørgsmål c: Angiv et korteste veje (SSSP) træ for ovenstående graf, når korteste veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v. □

Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. For hver komponent angiv knuderne i komponenten. □

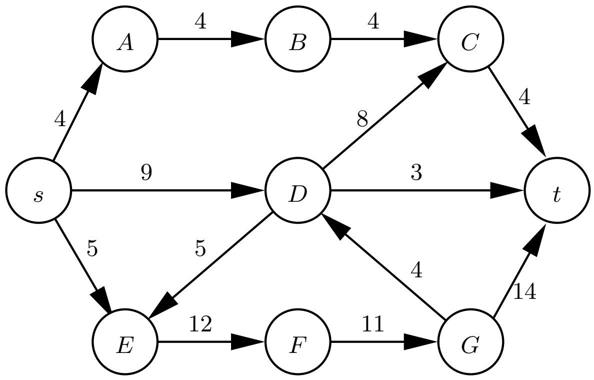


Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ (MST) for ovenstående uorienterede graf med vægte på kanterne. Angiv i hvilken rækkefølge knuderne bliver taget ud af prioritetskøen Q i Prim's algoritme, når denne starter i knuden A. □

Opgave 2 (15%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes en side til at angive svarene til opgave 2 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

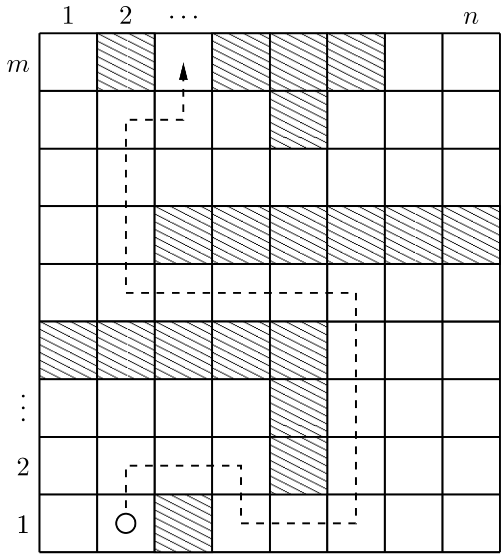
Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.



Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning (maximum flow) fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (cut) (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig værdien af en maksimal strømning. □

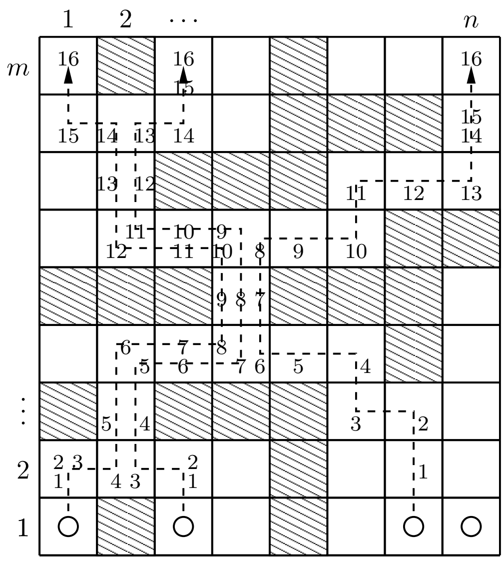
Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier (augmenting paths) der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen, man forbedrer med, langs stien. □

Opgave 3 (20%)



I denne opgave betragter vi et $m \times n$ gitter bestående af m rækker med n celler, og hvor nogle celler er blokkeret. Vi ønsker at finde stier fra cellerne i nederste række (række 1) til celler i den øverste række (række m), hvor en sti kun besøger ikke-blokkerede celler og hvor man i hvert skridt kun kan gå horisontalt eller vertikalt til en ikke-blokkeret nabocelle. Længden af en sti er antal skridt man tager. Eksemplet til højre viser en sti fra (1,2) til (9,3) af længde 19. Blokkerede celler er skraveret.

Spørgsmål a: Beskriv en algoritme der, givet et $m \times n$ gitter hvor nogle celler er blokkeret, et punkt $(1, i)$ nederst i gitteret, og en tid t, afgør om der findes en sti af længde højst t fra $(1, i)$ til en eller anden ikke-blokkeret celle i øverste række i gitteret. Angiv algoritmens udførselstid. □



Vi ønsker nu at finde flere samtidige stier fra celler i nederste række til celler i øverste række. Input er en delmængde I af de ikke-blokkerede celler i række 1, og en tid t. Vi ønsker at finde en størst mulig delmængde $I_0 \subseteq I$, således at der findes stier af længde t fra cellerne i I_0 til forskellige celler i den øverste række, således at til ethvert tidspunkt er ingen af stierne i samme celle. Det er tilladt at en sti forbliver i samme celle i et eller flere skridt. I eksemplet til højre er I cellerne med de fire cirkler i nederste række og $t = 16$. De tre stier angiver en mulig løsning, hvor tallene langs stierne angiver hvor stierne er til de forskellige tidspunkter. Bemærk f.eks. at man langs stien længst til venstre befinder sig i celle (2,1) til tiderne 1, 2 og 3. For at alle fire celler i I kan have en sti til en celle i øverste række ville det kræves at $t = 17$.

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der, givet et $m \times n$ gitter hvor nogle celler er blokkeret og k startceller $I = \{(1, i_1), \ldots, (1, i_k)\}$ nederst i gitteret, finder en maksimal delmængde $I_0 \subseteq I$ således at der findes stier fra alle $(1, i_j) \in I_0$ af længde t og således at ingen af stierne er i samme celle til et givet tidspunkt. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 4 (20%)

Givet en sorteret liste af n forskellige tal, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, og et heltal k, ønsker vi at finde k intervaller $I_1, \ldots, I_k$, hvor $I_i = [\ell_i, r_i]$ og $\ell_i \leq r_i$, således at alle x_i er dækket af mindst ét interval, dvs. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, og således at det længste interval er kortest mulig, dvs. $L = \max\{r_1 - \ell_1, r_2 - \ell_2, \ldots, r_k - \ell_k\}$ er mindst mulig.

F.eks. kan $x_1, \ldots, x_6 = 1, 3, 4, 8, 13, 15$ dækkes af de tre intervaller $[1, 4], [8, 8], [13, 15]$, hvor det længste interval er $[1, 4]$, som har længde $4 - 1 = 3$.

For $0 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq k$, lader vi $L(i, j)$ betegne den mindste intervallængde, hvor $x_1, x_2, \ldots, x_i$ kan dækkes af j intervaller med længde $L(i, j)$.

$L(i, j)$ kan bestemmes ved følgende rekursionsformel:

$$L(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i = 0 \\ x_i - x_1 & \text{hvis } i > 0 \text{ og } j = 1 \\ \min\{\max\{L(t-1, j-1), x_i - x_t\} \mid 1 \leq t \leq i\} & \text{hvis } i > 0 \text{ og } j > 1 \end{cases}$$

Spørgsmål a: Udfyld nedenstående tabel for $x_1, \ldots, x_7 = 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11$ og $k = 4$.

$L(i,j)$	1	2	3	4
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

□

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ og k, beregner $L(n, k)$. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til at udskrive en mængde af k intervaller der dækker $x_1, x_2, \ldots, x_n$, og hvor det længste interval er kortest mulig. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 5 (20%)

Givet en streng S af længde n, ønsker vi et at finde en delstreng yXy som forekommer flest gange i S, hvor y er et vilkårligt tegn og X er en vilkårlig streng (muligvis den tomme streng).

F.eks. for strengen S = `bacbacbaabacbbacabacbcc`, så forekommer `bacb` fire gange (y = `b` og X = `ac`).

Spørgsmål a: Angiv for nedenstående streng S en delstreng yXy som forekommer flest gange i S. Angiv også alle positioner i S hvor denne delstreng yXy forekommer.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$S=$	a	b	c	a	b	d	c	a	b	d	c	b	c	b	c	a	b	d	c	b	c	a	b	d	c	c	a	b

□

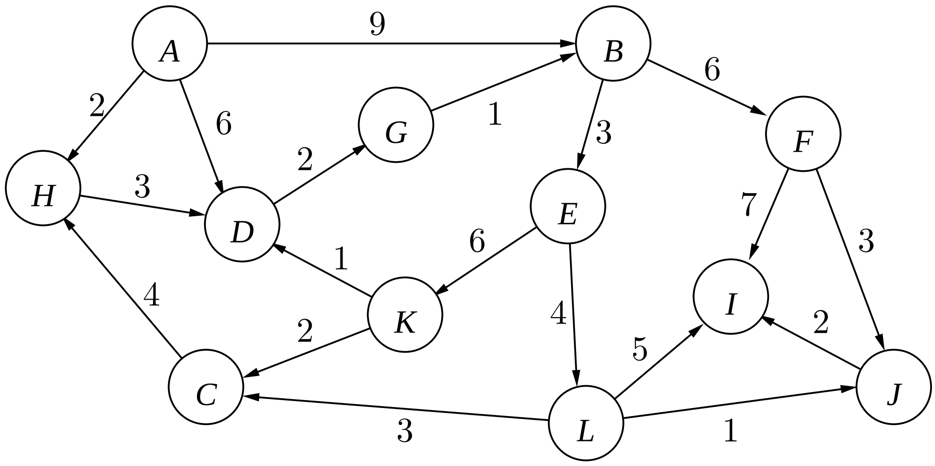
I det følgende kan det antages at et suffikstræ for en streng af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der givet en streng S af længde n og over et alfabet med $O(1)$ tegn, finder en delstreng yXy som forekommer flest gange i S. Det antages at der findes mindst et tegn som forekommer mindst to gange i S. Angiv algoritmens udførselstid. For at opnå fuld point for besvarelsen skal den beskrevne algoritme have udførselstid $O(n^2)$. (Problemet kan løses i $O(n)$ tid, hvilket det dog ikke kræves i denne opgave). □

Årskort:	Navn:

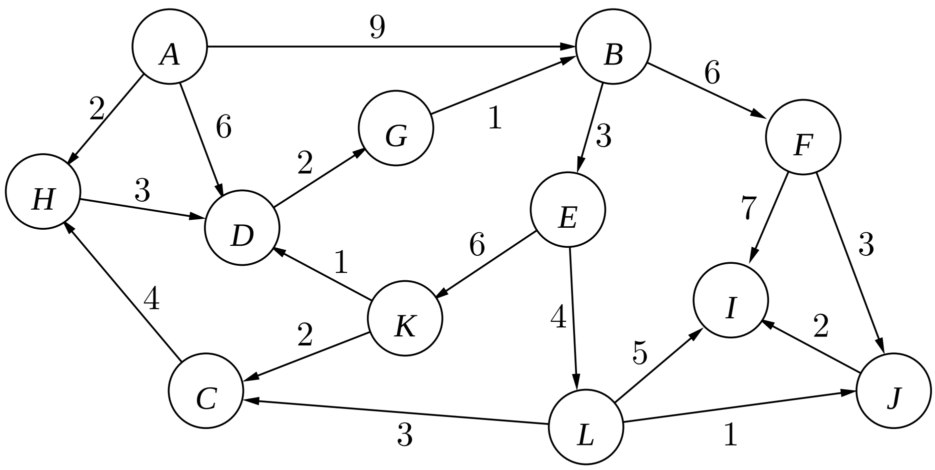
Opgave 1 — Svar

Spørgsmål a: BFS



Indsættelser i Q: ____________________

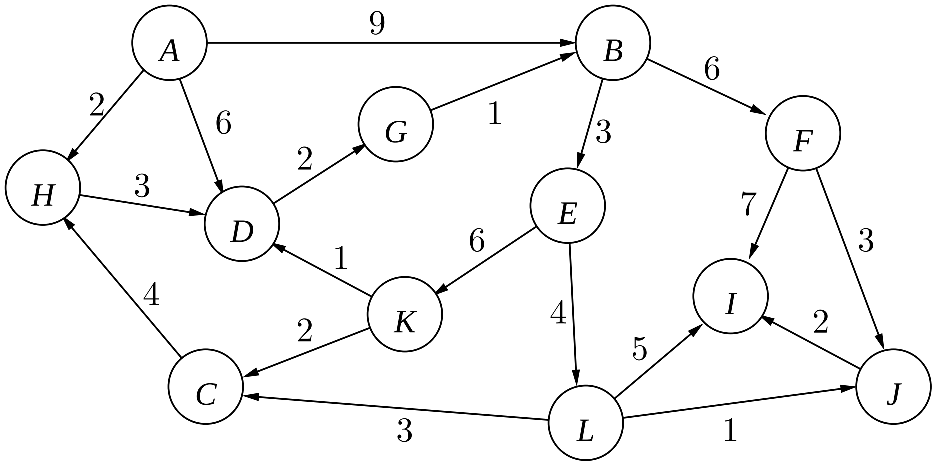
Spørgsmål b: DFS



(blank side)

Opgave 1 — Svar

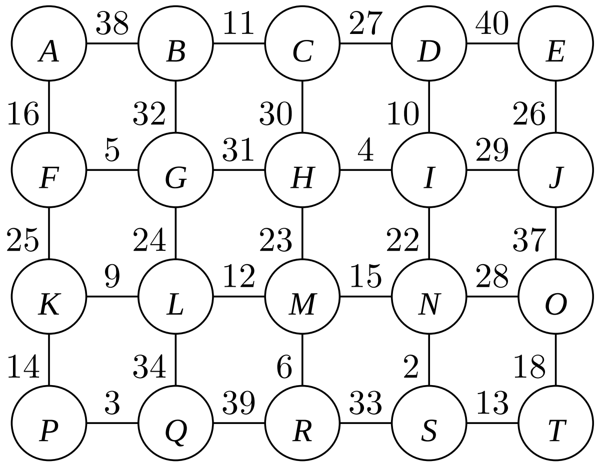
Spørgsmål c: SSSP



Spørgsmål d:

Stærke sammenhængskomponenter: ____________________

Spørgsmål e: MST

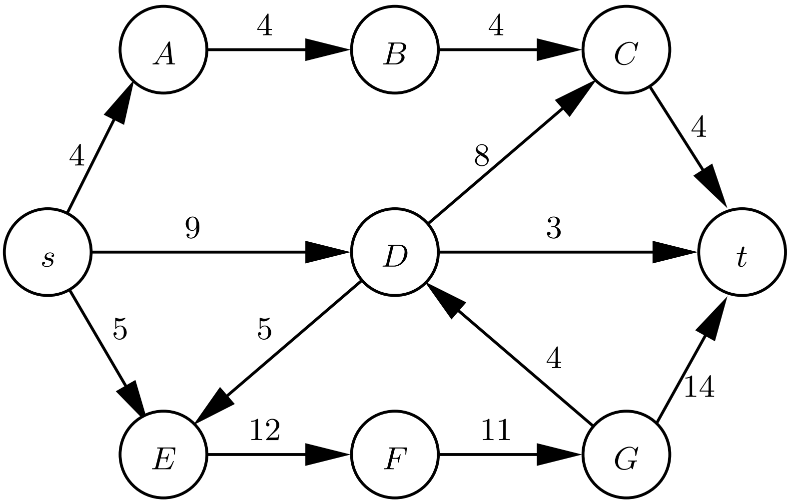


Udtagelse fra Q: ____________________

(blank side)

Opgave 2 — Svar

Spørgsmål a:



Værdien af strømning: ____________________

Minimal snit: ____________________

Spørgsmål b:

Forbedring	Forbedrende sti