INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 14 (fjorten)
Eksamensdag: Mandag den 24. juni 2013, kl. 9.00-13.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

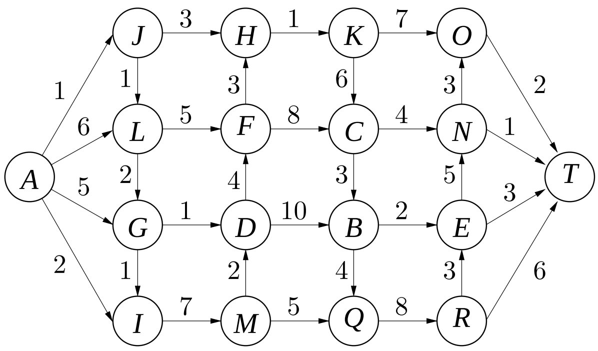
OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes sider til at angive svarene til opgave 1 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående vægtede orienterede graf. Det antages, at grafen er givet ved *incidenslister*, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.



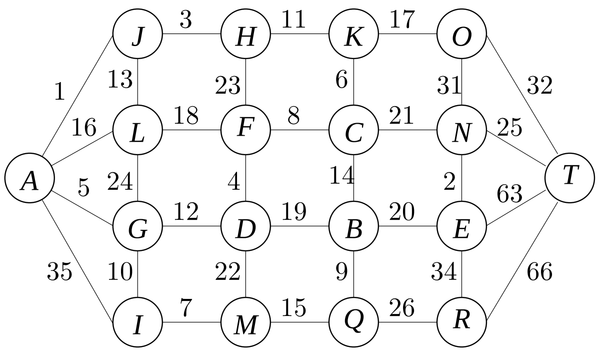
Spørgsmål a: Angiv et BFS-træ for ovenstående graf, hvor BFS-gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS-træet og BFS-numrene for knuderne. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS-træ for ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i knuden A, og en DFS-nummerering af knuderne. Angiv for hver knude "discovery time" og "finishing time". □

Spørgsmål c: Angiv et korteste veje (SSSP) træ for ovenstående graf, når korteste veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v. □

Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. For hver komponent angiv knuderne i komponenten. □

Spørgsmål e: Angiv en topologisk sortering af knuderne i ovenstående graf. Angiv svaret som en liste af knuderne. □



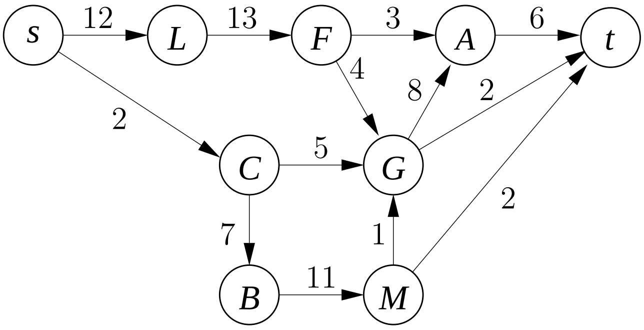
Spørgsmål f: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ (MST) for ovenstående uorienterede graf med vægte på kanterne. □

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 2 (15%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes en side til at angive svarene til opgave 2 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.

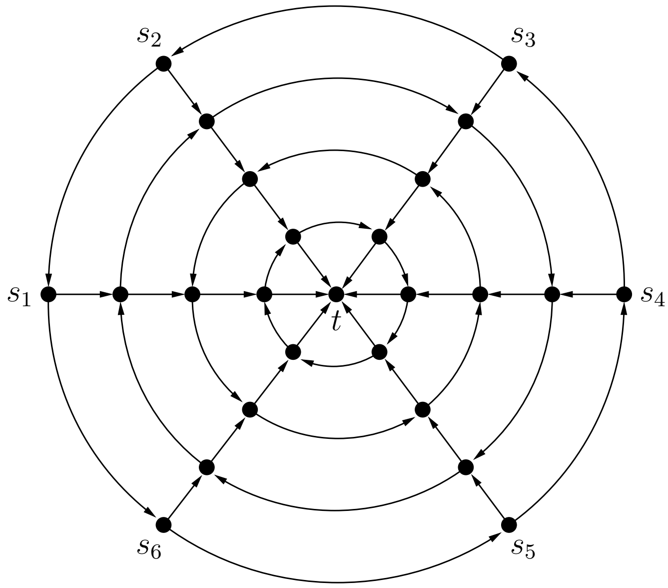


Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning (maximum flow) fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (cut) (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig værdien af en maksimal strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier (augmenting paths) der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen, man forbedrer med, langs stien. □

Opgave 3 (20%)

I denne opgave betragter vi *ringgrafer*, som består af r ringe med hver k knuder, og en knude i midten. Dvs. en ringgraf har totalt $n = rk + 1$ knuder. Kanterne er orienterede således at i hver anden ring løber kanterne rundt med uret, og i de øvrige ringe løber kanterne mod uret. Hver knude i en ring har desuden en kant til den tilsvarende knude i den næste indre ring, og alle knuder i den inderste ring peger på knuden t. Knuderne i den yderste ring er $s_1, \ldots, s_k$. Se nedenstående eksempel, hvor $r = 4$ og $k = 6$. Vi antager i det følgende at alle kanter har en vægt, der er et reelt tal der også kan være negativt. Vi antager dog at den totale vægt i hver ring er positiv.



Spørgsmål a: Beskriv en $O(n)$ tids algoritme til at beregne længden af en korteste vej fra s_1 til t. □

Spørgsmål b: Angiv en $O(n)$ tids algoritme til at finde det s_i, som har den korteste afstand til t. □

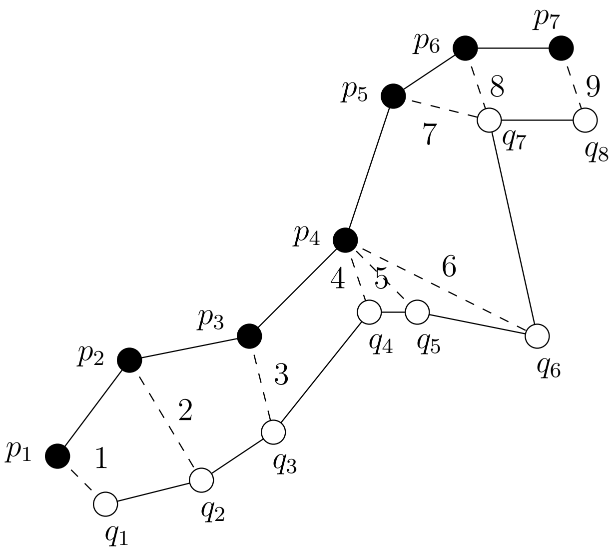
Spørgsmål c: Angiv en algoritme der finder det maksimale antal kant-disjunkte stier fra forskellige knuder s_i til t, hvor vægtene på alle kanter på stierne er ikke-negativ. Dvs. find den største delmængde af knuder $s_1, \ldots, s_k$ således at der findes en sti fra s_i til t, og så ingen af disse stier har nogle kanter til fælles og alle stier indeholder kun ikke-negativt vægtede kanter. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 4 (20%)

I denne opgave betragter vi en mand der er ude at lufte sin hund. Manden følger en sti af punkter $p_1, \ldots, p_n$ og hunden følger en række punkter $q_1, \ldots, q_m$. Vi antager at turen er delt i en mængde små skridt, hvor manden og hunden i hvert skridt begge flytter sig fra hhv. p_i og q_j til p_{i+1} og q_{j+1}, eller kun en af dem flytter sig til det næste punkt og den anden bliver stående. Opgaven går ud på at finde den mindste hundesnors længde L, således at manden og hunden kan bevære sig fra hhv. p_1 og q_1 til p_n og q_m, og på intet tidspunkt er hunden og manden længere fra hinanden end L. Bemærk at ingen af dem på noget tidspunkt må gå baglæns langs deres respektive stier, og vi kun betragter afstande mellem punkter p_i og q_j. Afstanden L betegnes også den *diskrete Fréchet afstand*.

Vi lader $L(i, j)$ betegne den mindste hundesnors længde, hvor manden og hunden kan bevæge sig fra hhv. p_1 og q_1 til p_i og q_j. For to punkter p og q, lader vi i det følgende $d(p, q)$ angive afstanden mellem punkterne.

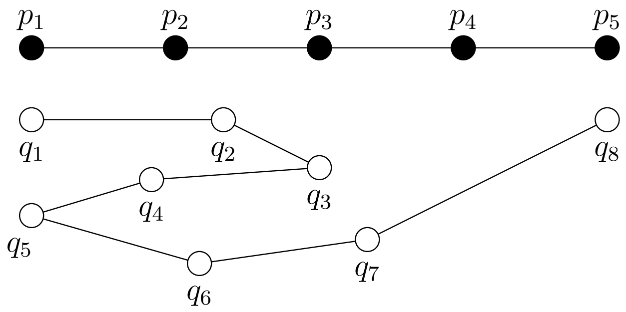
I neden stående eksempel angiver de stiplede linier hvor manden (sorte knuder) og hunden (hvide knuder) er til tiderne 1 til 9. I eksemplet er den mindst mulige hundesnors længde $L = d(p_4, q_6)$.



$L(i, j)$ kan bestemmes ved følgende rekursionsformel:

$$L(i,j) = \begin{cases} d(p_1, q_1) & \text{hvis } i = 1 \text{ og } j = 1 \\ \max\{d(p_1, q_j), L(1, j-1)\} & \text{hvis } i = 1 \text{ og } j > 1 \\ \max\{d(p_i, q_1), L(i-1, 1)\} & \text{hvis } i > 1 \text{ og } j = 1 \\ \max\{d(p_i, q_j), \min\{L(i-1, j-1), L(i-1, j), L(i, j-1)\}\} & \text{hvis } i > 1 \text{ og } j > 1 \end{cases}$$

Spørgsmål a: Angiv hvilket par p_i og q_j der medfører den mindste hundesnors længde $L = d(p_i, q_j)$ i nedenstående eksempel (i tabellen angiver $d(p_i, q_j)$ antal millimeter mellem p_i og q_j i eksemplet). Angiv også en mulig tur som kan gås med en hundesnor med længde L, ved at angive hvor manden og hunden er til de forskellige tidspunkter.



$d(p_i, q_j)$	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
p_1	9	26	40	23	22	35	49	74
p_2	21	11	24	17	29	28	35	56
p_3	38	15	15	27	43	32	25	38
p_4	56	32	24	43	59	43	27	21
p_5	74	50	40	60	77	58	39	9

□

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet punkter $p_1, \ldots, p_n$ og $q_1, \ldots, q_m$, beregner $L(n, m)$. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til også at rapportere en sti manden og hunden kan følge. Algoritmen skal angive hvor manden og hunden er til de forskellige tidspunkter. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 5 (20%)

Antag at vi er givet en streng T af længde n, og k strenge $S_1, \ldots, S_k$ med samlet længde N, dvs. $N = \sum_{j=1}^{k} |S_j|$. Vi siger T kan *dækkes* af $S_1, \ldots, S_k$, hvis enhver position i, $1 \leq i \leq n$, indgår i en delstreng $T[s..t] = S_j$, hvor $1 \leq j \leq k$ og $s \leq i \leq t$.

F.eks. kan position 9 ikke dækkes i nedenstående eksempel, dvs. T kan ikke dækkes af $S_1, \ldots, S_4$.

```
     1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
T =  b b a a b a b c a b  b  a  a
```

$S_1 =$ `a b a b`
$S_2 =$ `a b c`
$S_3 =$ `b b`
$S_4 =$ `b a a`

Spørgsmål a: Angiv hvilke positioner der ikke kan dækkes i nedenstående eksempel.

$S_1 =$ `a b a`
$S_2 =$ `a b b`
$S_3 =$ `a c a`

```
     1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
T =  a c a b a b c a c a  b  a  b  b  a  a  c  a  b  b
```

□

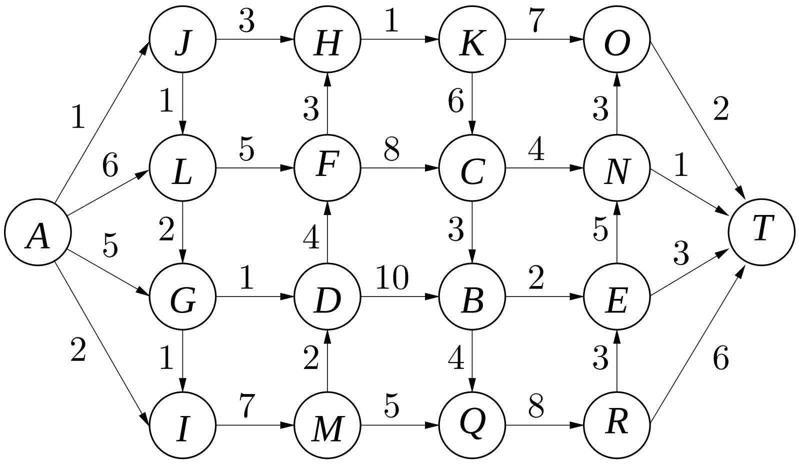
I det følgende kan det antages at et suffikstræ for en streng af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der afgør om en streng T kan dækkes af k strenge $S_1, \ldots, S_k$, hvor T har længde n og $S_1, \ldots, S_k$ har samlet længde N, og alle strenge er over et alfabet med $O(1)$ tegn. Angiv algoritmens udførselstid. □

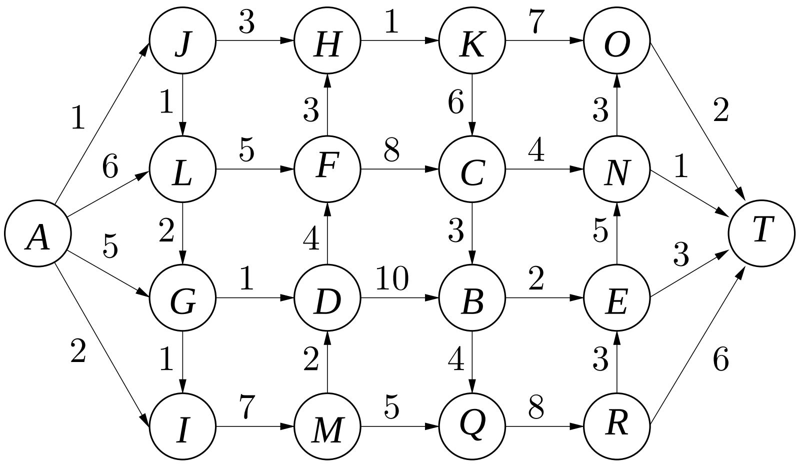
(blank side)

Opgave 1 — Svar

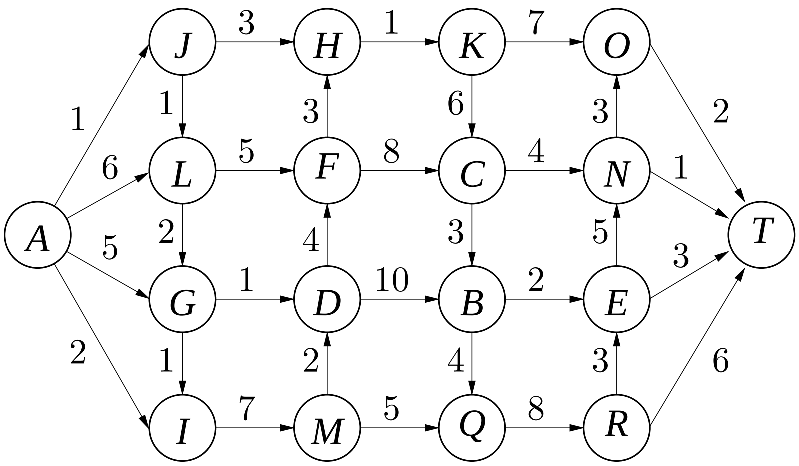
Spørgsmål a: BFS



Spørgsmål b: DFS



Spørgsmål c: SSSP



(blank side)

(Opgavesættet fortsætter)

Årskort:	Navn:

Opgave 1 — Svar

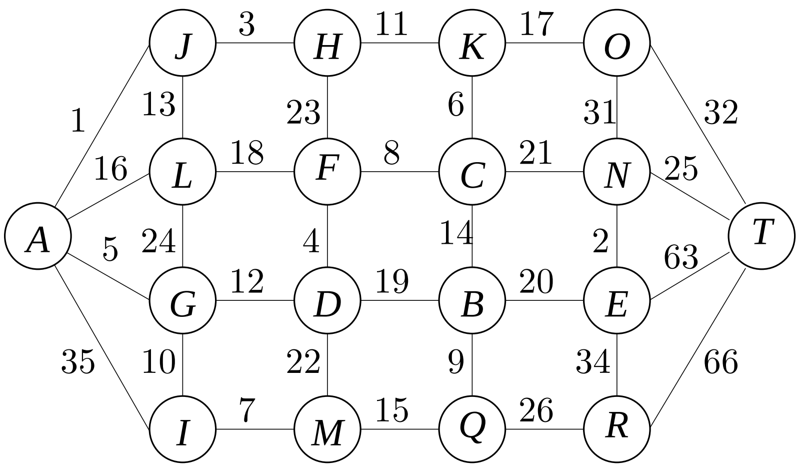
Spørgsmål d:

Stærke sammenhængskomponenter: ____________________

Spørgsmål e:

Topologisk sortering: ____________________

Spørgsmål f: MST

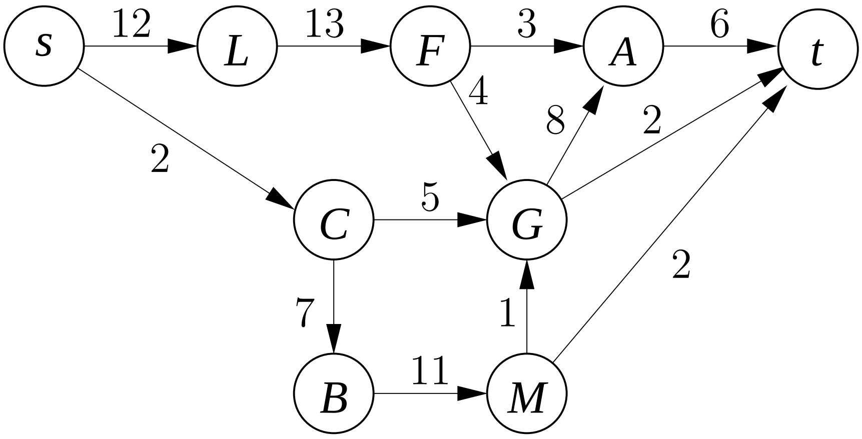


(blank side)

Årskort:	Navn:

Opgave 2 — Svar

Spørgsmål a:



Værdien af strømning: ____________________

Minimal snit: ____________________

Spørgsmål b:

Forbedring	Forbedrende sti

(blank side)