INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

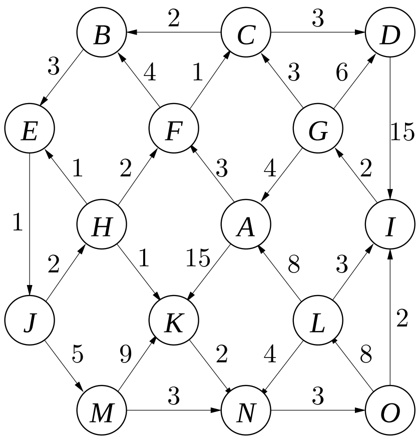
EKSAMEN
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 6 (seks)
Eksamensdag: Torsdag den 23. august 2012, kl. 9.00-13.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Betragt nedenstående vægtede orienterede graf. Det antages, at grafen er givet ved *incidenslister*, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

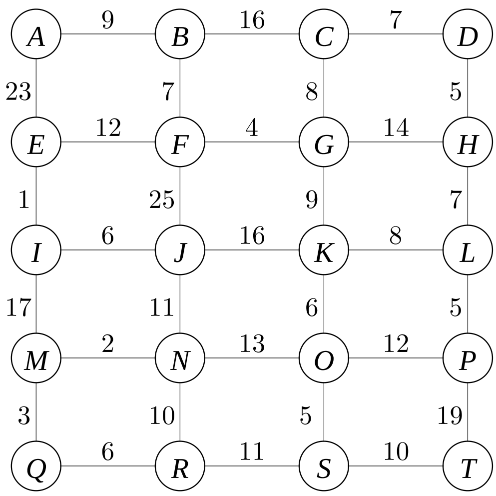


Spørgsmål a: Angiv et BFS-træ for ovenstående graf, hvor BFS-gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS-træet og BFS-numrene for knuderne. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS-træ for ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i knuden A, og en DFS-nummerering af knuderne. Angiv for hver knude "discovery time" og "finishing time". □

Spørgsmål c: Angiv et korteste veje (SSSP) træ for ovenstående graf, når korteste veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v. □

Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. For hver komponent angiv knuderne i komponenten. □

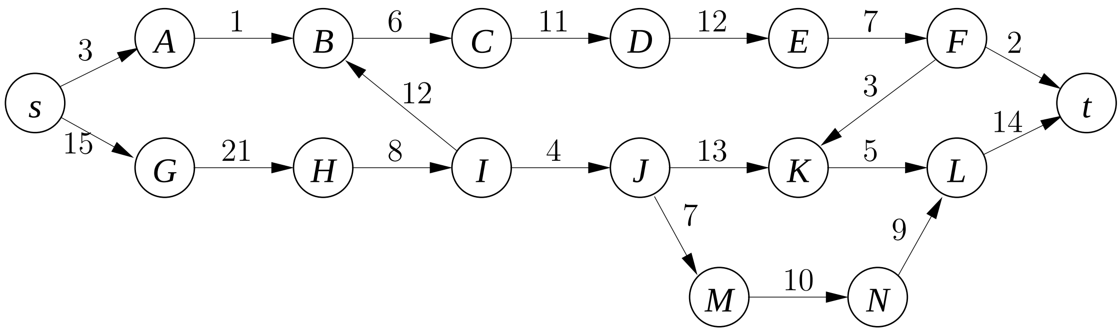


Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ for ovenstående uorienterede graf med vægte på kanterne. □

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 2 (15%)

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.

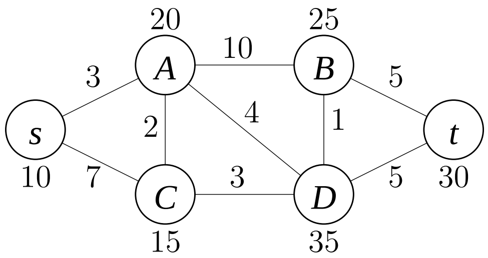


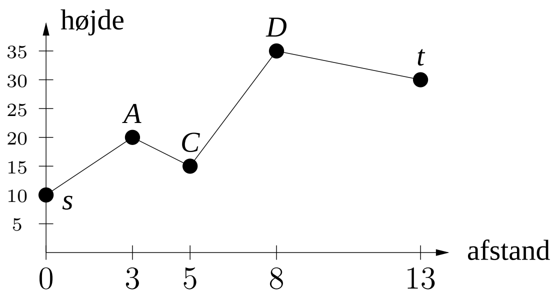
Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning (maximum flow) fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (cut) (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig værdien af en maksimal strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier (augmenting paths) der anvendes under udførelsen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen, man forbedrer med, langs stien. □

Opgave 3 (20%)

I denne opgave kigger vi på uorienterede grafer der repræsenterer vejnet med højdeangivelser. Vi ønsker at finde veje fra en startknude s til en slutknude t. Hver kant har en *afstand*, der angiver afstanden mellem kantens to endepunkter. Hver knude har en *højde*, der angiver højden over havet i knuden. Alle afstande og højder er positive heltal. En graf har n knuder og m kanter.





I ovenstående graf (til venstre) betragter vi stien $sACDt$. Højdeprofilen for denne sti er vist til højre. Stiens samlede længde er 13. Den maksimale højde på stien er i knuden D, hvor højden er 35. Den *samlede stigning* på stien er $30 = (20 - 10) + (35 - 15)$, som er summen af stigningerne på kanterne sA og CD. Bemærk at kanter hvor det går ned modregnes ikke i den samlede stigning. Bemærk at stien $sABt$ er længere (længde 18) men har en mindre samlet stigning (samlet stigning 20).

Spørgsmål a: Beskriv en algoritme, der givet et vægtet vejnet og en højde H, finder en korteste sti fra s til t, hvor den maksimale højde på stien er $\leq H$, eller rapporterer at ingen sådan sti findes. Angiv algoritmens udførselstid som funktion af m og n. Bemærk at algoritmens udførselstid ikke må afhænge af H. $\square$

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der givet et vægtet vejnet, finder en sti fra s til t, hvor den *samlede stigning er mindst mulig*. Angiv algoritmens udførselstid som funktion af m og n. Bemærk stien må være vilkårlig lang. $\square$

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der givet et vægtet vejnet og en højde H, finder en korteste sti fra s til t, hvor den samlede stigning er $\leq H$, eller rapporterer at ingen sådan sti findes. Angiv algoritmens udførselstid som funktion af m, n og H. *Hint: Udnyt at højderne er positive heltal.* $\square$

Opgave 4 (20%)

I denne opgave har vi en mængde mønter og et heltalligt beløb n, og ønsker at finde det mindste antal mønter således at n er lig summen af mønterne, eller rapportere at beløbet ikke er muligt at opnå med de givne mønter (hvor vi så blot returnerer $+\infty$). Vi antager at vi har k typer mønter. For den i'te type mønt, angiver v_i værdien af denne mønttype, og f_i antallet af mønter vi har med værdi v_i.

F.eks. kan man med nedenstående mønter opnå 29 med fire mønter (20+5+2+2), men 28 kan man ikke opnå.

i	1	2	3	4	5
v_i	1	2	5	10	20
f_i	0	3	4	3	2

Vi lader $C(n,i)$ betegne det mindste antal mønter, hvormed n kan skrives som summen af mønter af typerne $1,\ldots,i$ fra vores mængde. $C(n,i)$ kan bestemmes ved følgende rekursionsformel:

$$C(n,i) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 0 \\ +\infty & \text{hvis } n > 0 \text{ og } i = 0 \\ \min\{j + C(n - j \cdot v_i, i-1) \mid 0 \leq j \leq f_i \wedge n - j \cdot v_i \geq 0\} & \text{ellers} \end{cases}$$

Spørgsmål a: Angiv $C(46,4)$ for ovenstående mængde af mønter, dvs. det mindste antal mønter for at opnå beløbet 46 og hvor man kan anvende mønter af typerne $1,\ldots,4$. □

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet en mængde mønter og et heltal $n \geq 0$, beregner det mindste antal mønter der skal til at få beløbet n. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til også at rapportere værdien af mønterne for opnå beløbet n. Angiv algoritmens udførselstid. □

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 5 (20%)

Antag at vi er givet en streng $T = x_1 \ldots x_n$ af længde n. En *palindromsk gentagelse* i T er en streng S, således at både S og $\bar{S}$ forekommer som delstrenge i T, hvor $\bar{S}$ er S læst bagfra. F.eks. er $S =$`abcabab` en palindromsk gentagelse i strengen

$$T = \texttt{cabaa}\underline{\texttt{babacba}}\texttt{caa}\underline{\texttt{abcabab}}\texttt{ac}$$

da S forekommer på position 16, og $\bar{S} =$`babacba` på position 6. I det følgende ønsker vi at finde en palindromsk gentagelse med maksimal længde.

Spørgsmål a: Angiv en palindromsk gentagelse S med maksimal længde i nedenstående streng T. Angiv positionerne hvor S og $\bar{S}$ forekommer i T.

$$T = \texttt{cabaaabcbacbabcbaabacb}$$ □

I det følgende kan det antages at et suffikstræ for en streng af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der givet en streng T af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn, finder en palindromsk gentagelse med maksimal længde. Angiv algoritmens udførselstid. □