INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

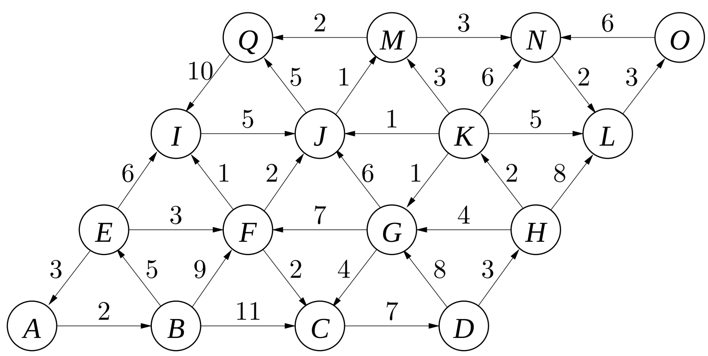
Science and Technology
EKSAMEN
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 6 (seks)
Eksamensdag: Fredag den 22. juni 2012, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Finlandsgade 8, bygning 5106-5108, 8200 Aarhus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Betragt nedenstående vægtede orienterede graf. Det antages, at grafen er givet ved *incidenslister*, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

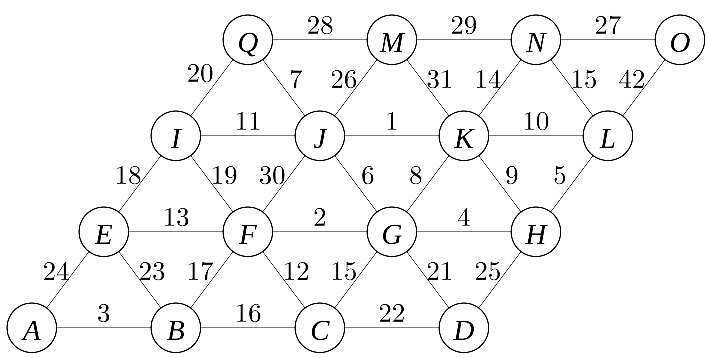


Spørgsmål a: Angiv et BFS-træ for ovenstående graf, hvor BFS-gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS-træet og BFS-numrene for knuderne. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS-træ for ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i knuden A, og en DFS-nummerering af knuderne. Angiv for hver knude "discovery time" og "finishing time". □

Spørgsmål c: Angiv et korteste veje (SSSP) træ for ovenstående graf, når korteste veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v. □

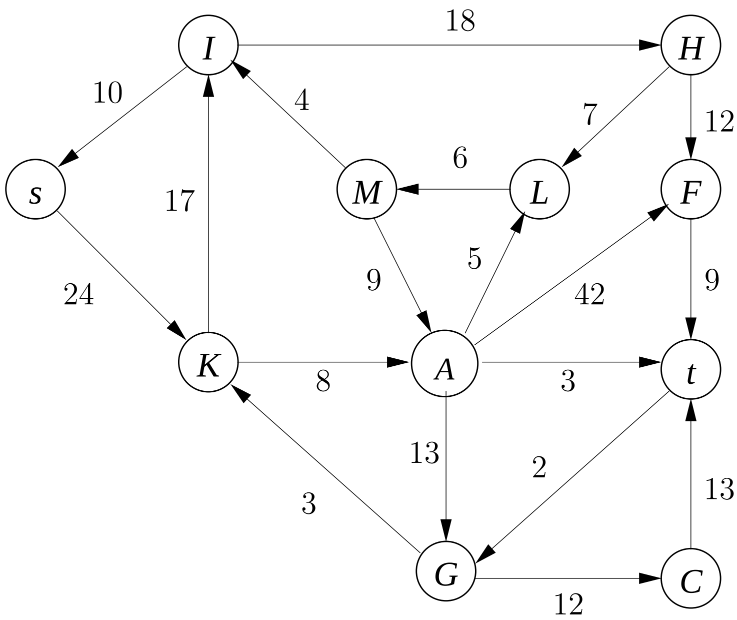
Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. For hver komponent angiv knuderne i komponenten. □



Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ for ovenstående uorienterede graf med vægte på kanterne. □

Opgave 2 (15%)

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.

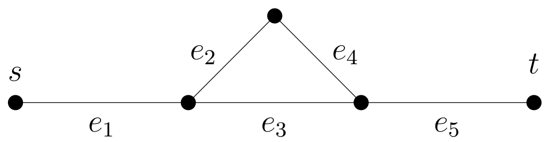


Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning (maximum flow) fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (cut) (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig værdien af en maksimal strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier (augmenting paths) der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen, man forbedrer med, langs stien. □

Opgave 3 (20%)

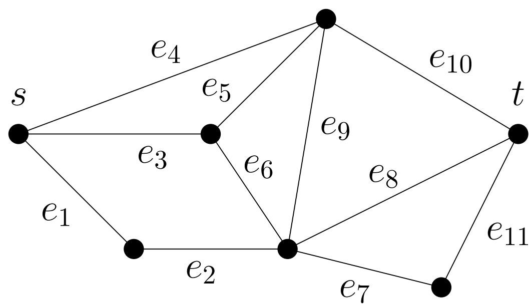
I denne opgave ønsker vi inden for tiden T at fragte flest mulige tog fra s til t i en uorienteret graf repræsenterende et tognet. Vi antager at til et vilkårligt tidspunkt kan et tog enten være i knuderne s eller t, eller på en af grafens kanter. Til ethvert tidspunkt kan der højst være ét tog på hver kant. I knuderne s og t kan der være et vilkårligt antal tog. Et tog der til tiden i befinder sig på en kant e (eller i s), kan til tiden $i+1$ stadig befinde sig på e (eller i s) eller skifte til en kant e' (eller t), såfremt e (eller s) og e' (eller t) deler et endepunkt. Til tiden 0 er alle tog i s og til tiden T skal alle tog være nået til t.



Tid i	0	1	2	3	4	5	6	7
`Thomas`	s	e_1	e_2	e_4	e_4	e_5	t	t
`Gordon`	s	s	e_1	e_3	e_5	t	t	t
`Percy`	s	s	s	e_1	e_2	e_4	e_5	t

Ovenstående er et eksempel på at få tre tog `Thomas`, `Gordon` og `Percy` fra s til t til tiden $T = 7$. Bemærk at på intet tidspunkt befinder der sig to tog på samme kant, og at `Thomas` er på kanten e_4 både til tiden 3 og 4, så `Gordon` kan køre fra e_3 til e_5 uden stop.

Spørgsmål a: Hvad er den mindste tid T, der skal til for at få de fire tog `Daisy`, `Rusty`, `Toby` og `Edward` fra s til t i nedenstående graf? Angiv T og en tabel, der for en mulig løsning angiver hvor hvert tog er til tiderne $0, \ldots, T$. □



Spørgsmål b: Hvad er det største antal tog man kan få fra s til t i tiden $T = 5$ i ovenstående graf? Angiv for en mulig løsning hvor hvert tog er til tiderne $0, \ldots, 5$. □

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der givet en tid T og en sammenhængene graf med m kanter repræsenterende et tognet, finder det største antal tog man kan få transporteret fra s til t inden for tiden T. Angiv algoritmens udførselstid som funktion af m og T. *Hint: Konstruer en ny graf hvor hver kant i det oprindelige tognet svarer til flere knuder.* □

Opgave 4 (20%)

I denne opgave ønsker vi, givet et heltal $n \geq 2$, at finde det mindste antal primtal $p_1, p_2, \ldots, p_k$ således at n kan skrives som summen $n = p_1 + \cdots + p_k$, hvor hvert primtal $p_i \geq 2$. F.eks. kan 27 skrives som summen af tre primtal, f.eks. $27 = 7 + 7 + 13$, men 27 kan ikke skrives som summen af to primtal. Bemærk at primtallene i summen ikke behøver at være forskellige. Vi lader $K(n)$ betegne det mindste antal primtal, hvor n kan skrives som summen af $K(n)$ primtal. F.eks. er $K(27) = 3$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	25	26	27	28	$\cdots$
$K(n)$	1	1	2	1	2	1	2	2	2	$\cdots$	2	2	3	2	$\cdots$
Sum	2	3	2+2	5	3+3	7	3+5	2+7	5+5		2+23	13+13	7+7+13	5+23	

$K(n)$ kan bestemmes ved følgende rekursionsformel:

$$K(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n \text{ er et primtal} \\ \min\{1 + K(n-p) \mid p \text{ et primtal} \wedge 2 \leq p \leq n-2\} & \text{ellers} \end{cases}$$

Spørgsmål a: Angiv $K(57)$ og primtal $p_1, \ldots, p_{K(57)}$, hvor $57 = p_1 + \cdots + p_{K(57)}$. □

I det følgende kan antages at man har givet et array P, således at

$$P[n] = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n \text{ er et primtal} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet et heltal $n \geq 2$ beregner $K(n)$. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til også at rapportere $K(n)$ primtal $p_1, \ldots, p_{K(n)}$, hvor $n = p_1 + \cdots + p_{K(n)}$. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 5 (20%)

Antag at vi er givet en streng $T = x_1 \ldots x_n$ af længde n. Et *skift* af T med s, $0 \leq s < n$, er strengen $T^s = x_{s+1}x_{s+2}\ldots x_n x_1 x_2 \ldots x_s$. I denne opgave ønsker vi at finde det *leksikografisk mindste skift*, d.v.s. et skift med s hvor T^s er leksikografisk mindst blandt $T^0, \ldots, T^{n-1}$. F.eks. er $T^2 = T^7 = \texttt{aababaabab}$ de leksikografisk mindste skift af strengen

$$T = \texttt{abaababaab}$$

Spørgsmål a: Angiv alle s hvor T^s er et leksikografisk mindste skift af strengen

$$T = \texttt{bcabaabcabaabcabaa}$$ □

I det følgende kan det antages at et suffikstræ for en streng af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der givet en streng T af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn, finder alle s hvor T^s er et leksikografisk mindste skift af strengen T. Angiv algoritmens udførselstid. □