DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

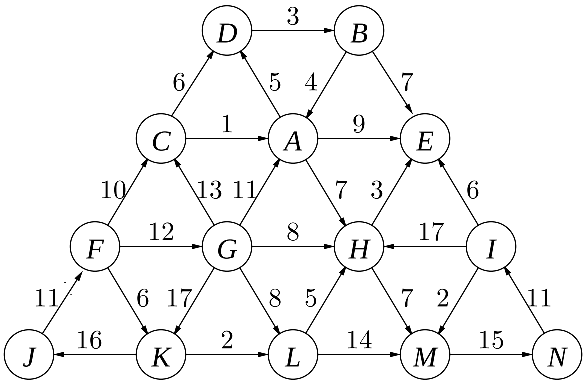
Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 7 (syv)
Eksamensdag: Fredag den 12. august 2011, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Åbogade 34, Benjaminbygningen, 8200 Aarhus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

I denne opgave betragter vi først orienterede *trekant-grafer* med ikke-negative vægte på kanterne. Et eksempel på en trekant-graf ses nedenfor. Det antages, at grafen er givet ved *incidenslister*, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

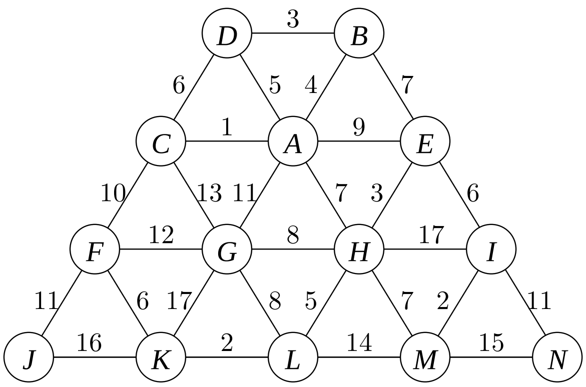


Spørgsmål a: Angiv et BFS-træ for ovenstående graf, hvor BFS-gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS-træet og BFS-numrene for knuderne. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS-træ for ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i knuden A, og en DFS-nummerering af knuderne. Angiv for hver knude “discovery time” og “finishing time”. □

Spørgsmål c: Angiv et korteste veje (SSSP) træ for ovenstående graf, når kortest veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v. □

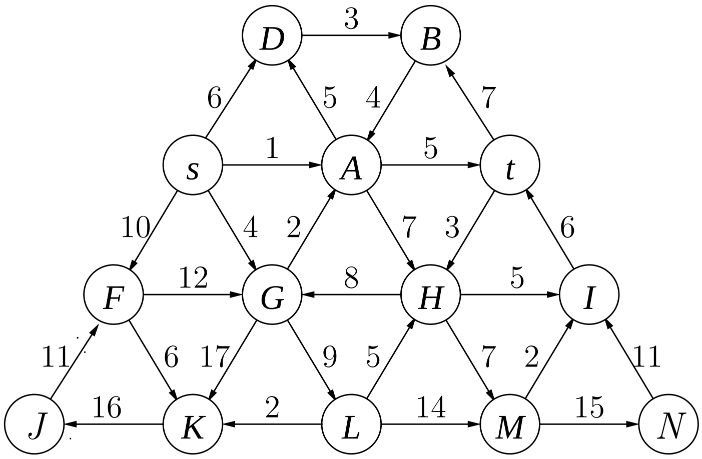
Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. □



Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ for ovenstående uorienterede trekant-graf med vægte på kanterne. □

Opgave 2 (15%)

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.



Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning (maximum flow) fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (cut) (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig værdien af en maksimal strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier (augmenting paths) der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen, man forbedrer med, langs stien. □

Opgave 3 (20%)

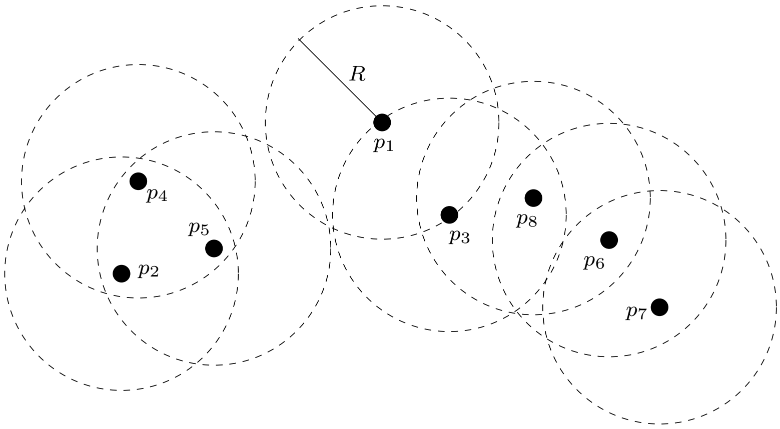
I det følgende betegner $p_1, \ldots, p_n$ punkter i planen, hvor $p_i = (x_i, y_i)$. Afstanden mellem to punkter p_i og p_j er givet ved

$$d(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

og antages at kunne beregnes i $O(1)$ tid.

I alle punkterne $p_1, \ldots, p_n$ placeres identiske radioer til kommunikation, som alle har identisk rækkevidde R. To punkter p_j og p_k kan kommunikere *direkte*, hvis $d(p_j, p_k) \leq R$. To punkter p_j og p_k kan kommunikere *indirekte*, hvis der findes en sekvens af punkter $p_j = p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_{m-1}}, p_{i_m} = p_k$, hvor $d(p_{i_\ell}, p_{i_{\ell+1}})$ for $0 \leq \ell < m$.

I nedenstående eksempel kan p_1 og p_3 kommunikere direkte, da p_3 ligger inde i cirkelen med centrum i p_1 og radius R. Punkterne p_1 og p_7 kan kommunikere indirekte via punkterne p_1, p_3, p_8, p_6, p_7. Punkterne p_2, p_4 og p_5 kan kommunikere direkte indbyrdes, men kan ikke kommunikere direkte eller indirekte med nogen af de øvrige punkter.



Spørgsmål a: Angiv en algoritme der beregner den mindste radius R således at alle punkter kan kommunikere direkte eller indirekte med hinanden. Angiv algoritmens udførselstid. □

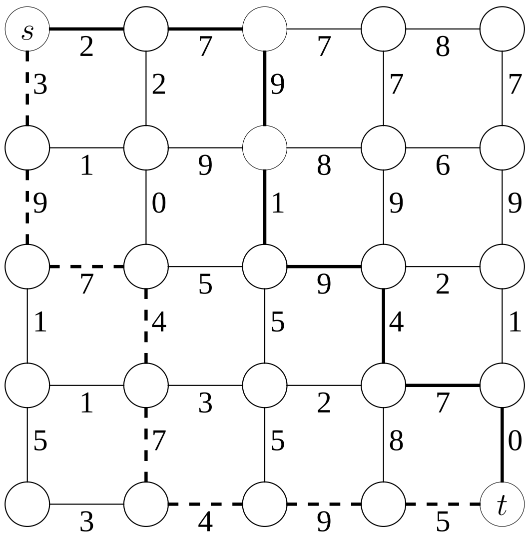
For en heltals parameter K, antag at vi ud over at udstyre hver punkt med en radio med radius R også kan udstyre op til K punkter med en satellitradio, således at alle par af punkter med satellitradioer også kan kommunikere med hinanden via satellit. I ovenstående eksempel kan vi for $K = 2$ f.eks. udstyre p_2 og p_6 med en satellitradio, hvorved alle otte punkter nu kan kommunikere direkte eller indirekte med hinanden.

Spørgsmål b: Angiv en algoritme der givet n punkter og en parameter K beregner den mindste radius R således at alle punkter kan kommunikere direkte eller indirekte med hinanden, hvis man også har K satellitradioer. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 4 (20%)

I denne opgave betragter vi "The Manhattan Tourist Problem".

Antag at vi skal gå fra øverste venstre hjørne (s) til nederste højre hjørne (t) i en kvadratisk gitter-graf, hvor alle kanter har en vægt. Grafen har n rækker med n knuder i hver række. Vi ønsker at finde en sti med færrest mulig kanter, og blandt alle stier med dette antal kanter ønsker vi at finde den sti med maksimal vægt (sum af vægtene på kanterne). De korteste stier har $2n-2$ kanter og man kommer fra s til t ved hele tiden enten at gå til højre eller ned. I nedenstående eksempel er $n = 5$ og der er angivet to kortest mulige stier med $2 \cdot 5 - 2 = 8$ kanter med henholdsvis vægt 30 (fed) og 48 (stiplet).



Lad (i, j) angive den j'te knude i række i, dvs. s er knude $(1, 1)$ og t knude (n, n). Lad $W_{i,j}$ være den maksimale vægtsum man kan få ved at gå fra s til (i, j), når man kun kan gå ned og til højre. Vægten $W_{i,j}$ kan bestemmes ved rekursionsformlen

$$W_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i = 1 \text{ og } j = 1 \\ W_{i-1,1} + D[i-1, 1] & \text{hvis } i > 1 \text{ og } j = 1 \\ W_{1,j-1} + R[1, j-1] & \text{hvis } i = 1 \text{ og } j > 1 \\ \max\{W_{i-1,j} + D[i-1, j], W_{i,j-1} + R[i, j-1]\} & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor $D[i, j]$ og $R[i, j]$ angiver vægten på kanterne henholdsvis nedad og mod højre fra knude (i, j). F.eks. er $D[3, 2] = 4$ og $R[2, 4] = 6$.

Spørgsmål a: Udfyld nedenstående tabel for ovenstående eksempel.

$W_{i,j}$	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

□

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der beregner den maksimale vægt en kortest mulig sti fra s til t kan have i en vægtet gitter-graf. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til også at rapportere knuderne på en kortest mulig sti med størst vægt. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 5 (20%)

Lad T være en streng med n tegn over et alfabet med $O(1)$ tegn. En *dækning* S af T er en delstreng S af T, således at alle tegn i T er indeholdt i en forekomst af S i T. I nedenstående eksempel er $S = \text{aba}$ en mulig dækning.

$$T = \text{a b a b a a b a a b a}$$

Bemærk at en dækning S af T nødvendigvis er både et præfiks og suffiks af T, dvs. den kortest mulige dækning S af T er en entydig delstreng. Der findes altid mindst en dækning af strengen T, da T altid er en triviel dækning af T selv.

Spørgsmål a: Angiv alle mulige dækninger S af nedenstående streng T. Angiv også for hver dækning S alle forekomsterne af S i T.

$$T = \text{a b a a b a b a a b a b a a b a a b a b a a b a}$$

$\square$

Spørgsmål b: Beskriv en $O(n)$ tids algoritme, der givet en streng T af længde n og et heltal k, afgør om præfikset $T[1..k]$ er en dækning af T. $\square$

I det følgende kan det antages at et suffikstræ for en streng af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme, der givet en streng T af længde n, finder den korteste mulige dækning af T. Angiv algoritmens udførselstid. $\square$