

DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12 (tolv)
Eksamensdag: Tirsdag den 20. marts 2012, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale: Finlandsgade 8, 8200 Aarhus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort _____

Navn _____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Tirsdag den 20. marts 2012, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s}{n} \right\} \cdot v \%$$

Opgave 1 (4%)

	Ja	Nej
n er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \cdot \log n$ er $O(n^{3/2})$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
n^2 er $O((\log n)^3)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(2/3)^n$ er $O(\log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$23n^2 + 7n$ er $O(30n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (4%)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O -notationen:

$$\begin{array}{c} 7n \\ 7^n \\ n^{1/7} \\ (\log n)^7 \\ n^7 \end{array}$$

Svar: _____

Opgave 3 (4%)

Betragt varianten af den binære max-heap, hvor hver knude har d børn istedet for to, og hvor $d \geq 2$ er en parameter. En max-heap har nu højde $O(\log_d n)$.

Hvad er tiden for INSERT og EXTRACT-MAX udtrykt som funktion af n og d .

INSERT ? Svar: _____

EXTRACT-MAX ? Svar: _____

Hvis vi sætter $d = \Theta(\sqrt{n})$, hvad bliver tiden for INSERT og EXTRACT-MAX udtrykt som funktion af n ?

INSERT ? Svar: _____

EXTRACT-MAX ? Svar: _____

Opgave 4 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)
for $i = 1$ to n
 for $j = i$ to n
 for $k = i$ to j
 $s = s + 1$

Algoritme Loop2(n)
 $s = 0$
while $n > 1$
 for $i = 1$ to n
 $s = s + 1$
 $n = \lfloor n/2 \rfloor$

Algoritme Loop3(n)
for $i = 1$ to n
 $s = 1$
 while $s \leq i$
 $s = 2 * s$

Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

Opgave 5 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)
 $i = 1$
while $i < n$
 $i = i * n$

Algoritme Loop2(n)
 $i = 1$
while $i < n$
 $i = i * 2$

Algoritme Loop3(n)
for $i = 1$ to n
 $s = 0$
 while $s < n$
 $s = s + i$

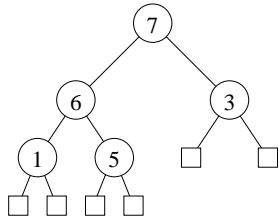
Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

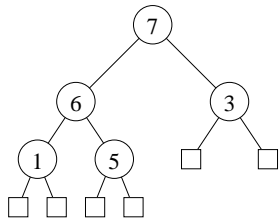
Opgave 6 (4%)

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 8.



Svar: _____

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en HEAP-EXTRACT-MAX operation.



Svar: _____

Opgave 7 (4%)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, og 5 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: _____

Opgave 8 (4%)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	7	1	10	4	5	6	8	2	9

Svar: _____

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 9 (4%)

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 4$, $k = 6$). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de *tre* mindst betydende cifre.

1453 4213 5123 4311 3213 3311

Svar: _____

Opgave 10 (4%)

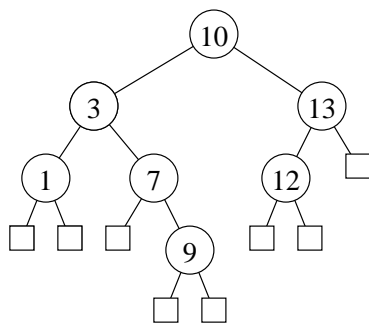
Angiv resultatet af at anvende PARTITION($A,3,11$) på nedenstående array.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	8	16	1	6	2	4	13	17	15	3	5	18	9	11	24	12

Svar: _____

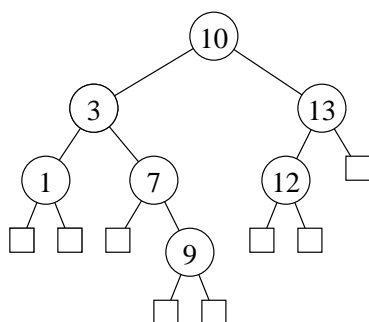
Opgave 11 (4%)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 4.



Svar: _____

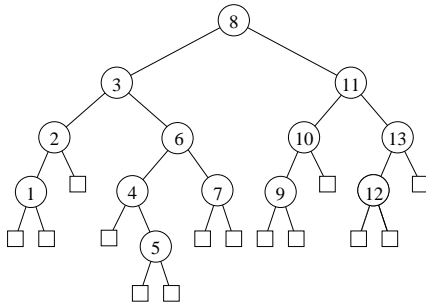
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 10.



Svar: _____

Opgave 12 (4%)

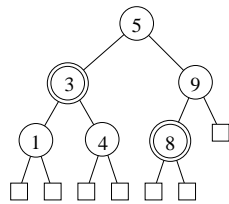
Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.



Svar: _____

Opgave 13 (4%)

Tegn hvordan nedenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 6.



Svar: _____

Opgave 14 (4%)

Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hash-funktionen er $h(k) = 3k \bmod 5$ og der indsættes elementerne 7, 5, 1, 3, 4, 6 og 8 i den givne rækkefølge.

Svar: _____

Opgave 15 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *linear probing* ser ud efter at elementerne 1, 2, 3, 8, 10 og 9 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k) = 4k \text{ mod } 7$.

0	1	2	3	4	5	6

Svar: _____

Opgave 16 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *double hashing* ser ud efter at elementerne 0, 4, 2 og 8 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er

$$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \text{ mod } 11$$

$$h_1(k) = 3k \text{ mod } 13 \quad h_2(k) = 1 + (4k \text{ mod } 9)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Svar: _____

Opgave 17 (4%)

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering. Angiv for hver knude rangen af knuden.

makeset(*a*)
makeset(*b*)
makeset(*c*)
makeset(*d*)
makeset(*e*)
makeset(*f*)
union(*a*,*b*)
union(*c*,*d*)
union(*d*,*a*)
union(*e*,*f*)
union(*c*,*e*)

Svar: _____

Opgave 18 (4%)

Betragt union-find strukturer hvor der anvendes linking-by-rank. Hvad er tiden for FIND på en mængde med n elementer – med og uden stikomprimering ?

Uden stikomprimering ? Svar = _____

Med stikomprimering ? Svar = _____

Opgave 19 (4%)

For en liste af punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, hvor $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, definerer vi punkterne til at være *monotont voksende* hvis der gælder

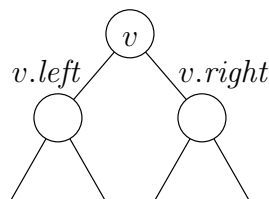
$$y_1 < y_2 < \dots < y_n$$

F.eks. er punkterne

$$(1, 3), (4, \underline{7}), (6, \underline{5}), (8, 9)$$

ikke monotont voksende da $7 > 5$.

Betragt et søgetræ hvor hver knude v gemmer et punkt, og hvor punkterne er sorteret fra venstre-mod-højre efter deres x -værdi. I hver knude gemmes ud over $v.x$ og $v.y$ også $v.ymin$ og $v.ymax$, som er hhv. den mindste og største y -værdi i v 's undertræ, og en boolsk variabel $v.inc$ der angiver om listen af punkter i v 's undertræ er monotont voksende. Angiv hvorledes disse værdier kan beregnes når den tilsvarende information er kendt ved de to børn $v.left$ og $v.right$ (det kan antages at disse begge eksisterer).



Svar $v.ymin$ = _____

Svar $v.ymax$ = _____

Svar $v.inc$ = _____

Transitionssystem Frem-og-Tilbage
Konfigurationer: $\{[i, k] \mid \text{heltal } i, k \wedge i \geq 0 \wedge k \geq 0\}$
 $[i, k] \triangleright [i - 3, k + 2] \quad \text{if } i \geq 3$
 $[i, k] \triangleright [i + 1, k - 1] \quad \text{if } k \geq 1$

Opgave 20 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem Frem-og-Tilbage. Startkonfigurationen antages at være $[n, n]$ hvor $n \geq 0$.

	Ja	Nej
$i + k = 2n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i \leq 2n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i + k \leq 2n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2i + 3k \leq 5n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i \geq k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 21 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem Frem-og-Tilbage.

	Ja	Nej
$\mu(i, k) = 2i + 3k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, k) = i + k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, k) = 3i + 4k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, k) = 3i + 2k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, k) = \min\{i, k\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Algoritme Power(n, x)

Inputbetingelse : heltal n og x , hvor $x \geq 2$ og $n \geq 1$

Outputkrav : $r = x^n$

Metode : $r \leftarrow 1$;
 $p \leftarrow n$;
 $y \leftarrow x$;
{I} **while** $p > 0$ **do**
 if p ulige **then**
 $r \leftarrow r * y$;
 $p \leftarrow p - 1$
 else
 $y \leftarrow y * y$;
 $p \leftarrow p/2$

Opgave 22 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Power.

	Ja	Nej
$x^n = y^p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x^n = r \cdot y^p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = x^n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r \cdot x^n = y^p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 23 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Power.

	Ja	Nej
$\mu(n, x, r, p, y) = x^n - r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, x, r, p, y) = y^p - r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, x, r, p, y) = p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, x, r, p, y) = x^n - y^p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, x, r, p, y) = 2x^n - r - y$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 24 (4%)

Givet et positivt heltal n , så beregner nedenstående algoritme summen

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_i , I_p og I_r være invarianter omkring variable i , p , og r . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke).

Algoritme Sum(n)

Inputbetingelse : positivt heltal $n \geq 1$

Outputkrav : $r = \sum_{j=1}^n j^2$

Metode : $i \leftarrow 1$;

$p \leftarrow 1$;

$r \leftarrow 1$;

$\{I_i \wedge I_p \wedge I_r\}$ **while** $i < n$ **do**

$p \leftarrow p + i + i + 1$;

$r \leftarrow r + p$;

$i \leftarrow i + 1$

Svar I_i : _____

Svar I_p : _____

Svar I_r : _____

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ : _____

Opgave 25 (4%)

For at argumentere for at tiden for at rebalancere et rød-sort træ efter indsættelsen af en ny knude er amortiseret $O(1)$ skal man anvende en potentiale funktion. Angiv en sådan potentiale funktion.

Svar Φ : _____