Opgave 1 (4 %)

	Ja	Nej
$n^2 + 2^n$ er $O(n^4)$?	☐	☒
$7n^2 + 3n + 4$ er $O(n^3)$?	☒	☐
$\log n + \log^2 n$ er $O(\sqrt{n})$?	☒	☐
$3n^2 + 2n^3$ er $O(n)$?	☐	☒
$\sqrt{7}$ er $O(\log n)$?	☒	☐

Opgave 2 (4 %)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O-notationen:

$$(\sqrt{n})^5$$
$$7n^2$$
$$(\log n)^3$$
$$2^{3 \log n}$$
$$\log(n^3)$$

Svar: $\log(n^3)$ $(\log n)^3$ $7n^2$ $(\sqrt{n})^5$ $2^{3 \log n}$

Opgave 3 (4 %)

Betragt Randomized-Select anvendt til at finde det $\lceil \sqrt{n} \rceil$ mindste element i et array med n elementer. Angiv for hvert af nedenstående spørgsmål svaret som funktion af n i O-notation.

Worst-case antal rekursive kald?	Svar: $O(n)$
Forventede antal rekursive kald?	Svar: $O(\log n)$
Worst-case tid?	Svar: $O(n^2)$
Forventet tid?	Svar: $O(n)$

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 4 (4 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O-notation.

```
Algoritme Loop1(n)
  s = 1
  for i = 1 to n
    for j = 1 to n + 1 − i
      s = s + 1
```

```
Algoritme Loop2(n)
  s = 0
  for i = 1 to n
    while s ≤ i
      s = s + 1
```

```
Algoritme Loop3(n)
  s = 1
  for i = 1 to n
    while s ≤ i
      s = 2 ∗ s
```

Svar Loop1: $O(n^2)$

Svar Loop2: $O(n)$

Svar Loop3: $O(n)$

Opgave 5 (4 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O-notation.

```
Algoritme Loop1(n)
  i = 1
  j = 1
  while i ≤ n
    while j ≤ i
      j = 2 ∗ j
    i = 2 ∗ i
```

```
Algoritme Loop2(n)
  i = 1
  while i < n
    i = i ∗ n
```

```
Algoritme Loop3(n)
  i = 1
  j = 1
  while j ≤ n
    j = j + i
    i = i + 1
    k = 1
    while k ≤ i
      k = 2 ∗ k
```

Svar Loop1: $O(\log n)$

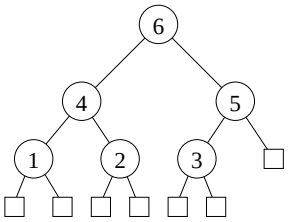
Svar Loop2: $O(1)$

Svar Loop3: $O(\sqrt{n} \cdot \log n)$

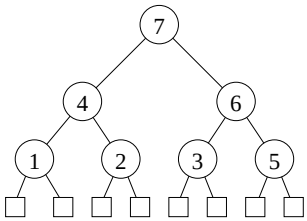
(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 6 (4 %)

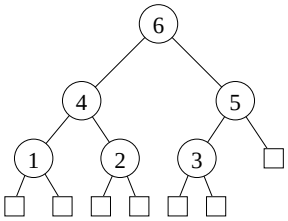
Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 7.



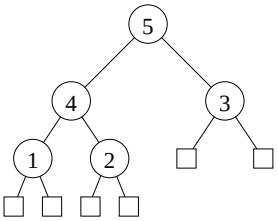
Svar:



Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en HEAP-EXTRACT-MAX operation.



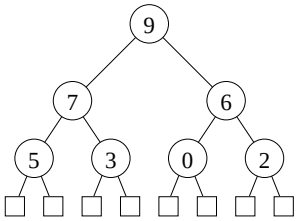
Svar:



Opgave 7 (4 %)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 7, 5, 2, 9, 3, 0 og 6 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar:



Opgave 8 (4 %)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	10	4	3	7	2	9	6	8	1

Svar:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	9	6	7	2	4	5	3	1

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 9 (4 %)

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 4$, $k = 5$). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de *to* mindst betydende cifre.

3311 3412 2433 4410 1212 1133

Svar: 4410 3311 3412 1212 2433 1133

Opgave 10 (4 %)

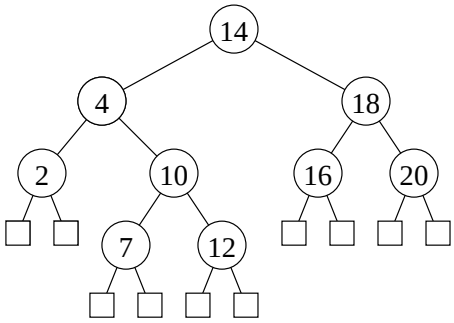
Angiv resultatet af at anvende PARTITION(A,6,14) på nedenstående array.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	8	16	1	6	2	4	13	17	15	3	18	5	9	11	24	12	14	10	7	22

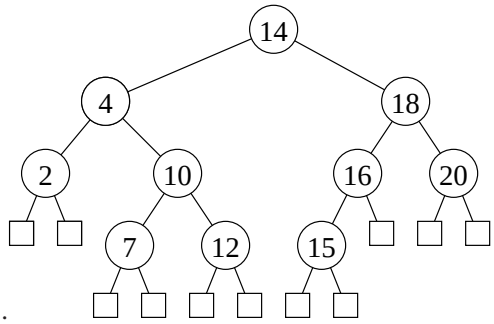
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Svar:	8	16	1	6	2	**4**	**3**	**5**	**9**	**11**	**18**	**17**	**15**	**13**	24	12	14	10	7	22

Opgave 11 (4 %)

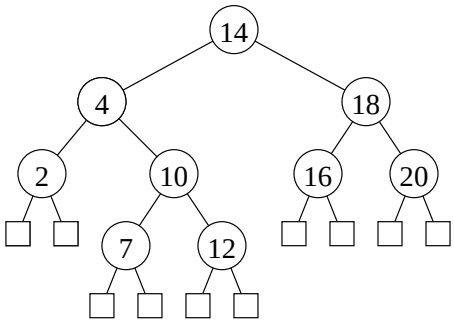
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 15.



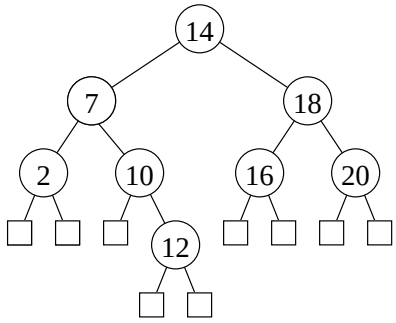
Svar:



Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 4.



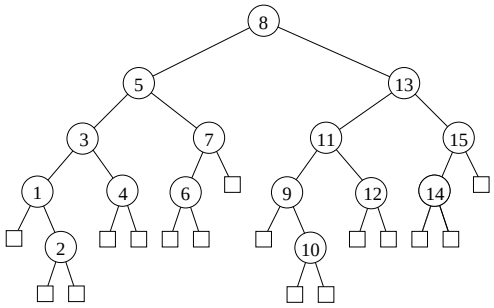
Svar:



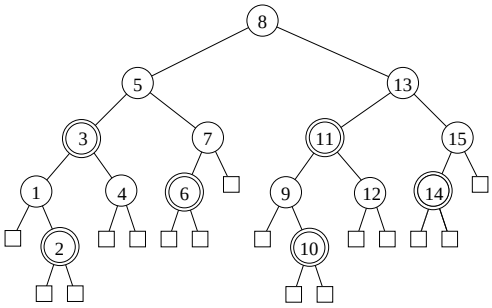
(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 12 (4 %)

Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.

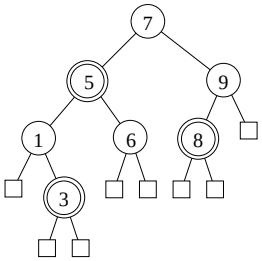


Svar:

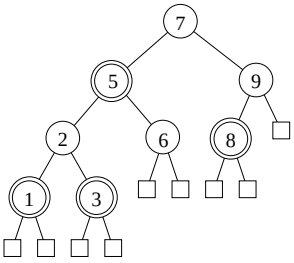


Opgave 13 (4 %)

Tegn hvordan nedenstående rød-sorte træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 2.



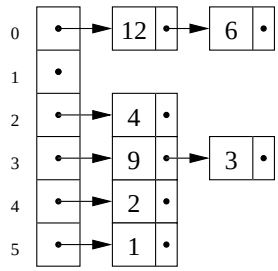
Svar:



Opgave 14 (4 %)

Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hashfunktionen er $h(k) = 5k \bmod 6$ og der indsættes elementerne 1, 2, 3, 4, 6, 9 og 12 i den givne rækkefølge.

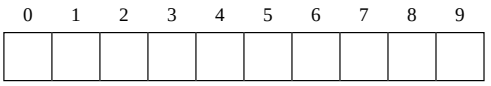
Svar:

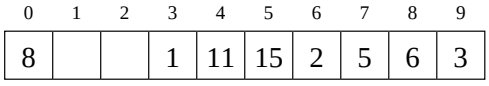


(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 15 (4 %)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *linear probing* ser ud efter at elementerne 1, 2, 15, 5, 6, 3, 11 og 8 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k) = 3k \bmod 10$.



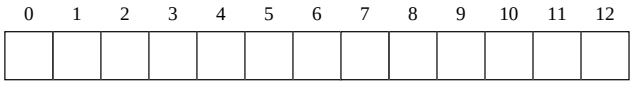


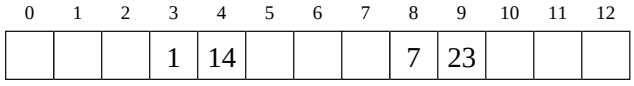
Svar:

Opgave 16 (4 %)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *quadratic probing* ser ud efter at elementerne 1, 7, 14 og 23 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er

$$h(k, i) = 3k + 3i + 2i^2 \bmod 13$$





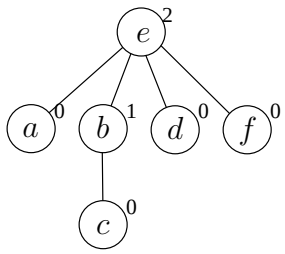
Svar:

Opgave 17 (4 %)

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering. Angiv for hver knude rangen af knuden.

makeset(a)
makeset(b)
makeset(c)
makeset(d)
makeset(e)
makeset(f)
union(a,b)
union(a,c)
union(d,e)
union(b,d)
union(a,f)

Svar:



Opgave 18 (4 %)

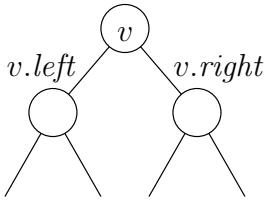
For en sorteret liste af tal $x_1, \ldots, x_n$, definerer vi

$$\text{maxgap}(x_1, \ldots, x_n) = \max\{x_n - x_{n-1}, x_{n-1} - x_{n-2}, \ldots, x_3 - x_2, x_2 - x_1\}$$

F.eks. er

$$\text{maxgap}(7, 12, 19, 23) = \max\{23 - 19, 19 - 12, 12 - 7\} = 7$$

Betragt et søgetræ hvor hver knude v ud over et element $v.e$, gemmer $v.maxgap$ som er lig maxgap(elementerne i v's undertræ), og $v.min$ og $v.max$ som er hhv. det mindste element og største element i v's undertræ. Angiv hvorledes disse værdier kan beregnes når den tilsvarende information er kendt ved de to børn $v.left$ og $v.right$ (det kan antages at disse begge eksisterer). F.eks. betegner $v.right.min$ det mindste element i v's højre undertræ.



Svar $v.min$ = $v.left.min$

Svar $v.max$ = $v.right.max$

Svar $v.maxgap$ = $\max\{v.left.maxgap, v.right.maxgap, v.e - v.left.max, v.right.min - v.e\}$

Opgave 19 (4 %)

Betragt Radix-Sort anvendt til at sortere n binære tal med 128 bits hver. Angiv for $n = 1.000.000$ og $n = 1.000$ det antal bits r hvert kald af Counting-Sort skal kigge på for at minimere udførselstiden for Radix-Sort.

$n = 1.000.000$? Svar r = 16

$n = 1.000$? Svar r = 8

(Opgavesættet fortsætter)

Transitionssystem Nedtælling
Konfigurationer: $\{[i,k] \mid \text{heltal } i,k \wedge i \geq 1 \wedge k \geq 0\}$

$[i,k] \rhd [i-1,k]$ **if** $i \geq 2 \wedge i$ ulige
$[i,k] \rhd [i/2,k+1]$ **if** $i \geq 2 \wedge i$ lige

Opgave 20 (4 %)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem Nedtælling. Startkonfigurationen antages at være $[n,0]$ hvor $n \geq 1$.

	Ja	Nej
$i + k \leq n$	☒	☐
$\lfloor \log i \rfloor + k = \lfloor \log n \rfloor$	☒	☐
$k \leq \lfloor \log n \rfloor$	☒	☐
$i - k \geq 0$	☐	☒
$2^k \leq i$	☐	☒

Opgave 21 (4 %)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem Nedtælling.

	Ja	Nej
$\mu(i,k) = i$	☒	☐
$\mu(i,k) = \log i$	☐	☒
$\mu(i,k) = \lceil \log i \rceil$	☐	☒
$\mu(i,k) = i + k$	☐	☒
$\mu(i,k) = 2i + k$	☒	☐

(Opgavesættet fortsætter)

Algoritme SumOfSquares(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : $r = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$
Metode : $j \leftarrow 1$
$r \leftarrow 1$
$\{I\}$ **while** $j < n$ **do**
$j \leftarrow j + 1$
$r \leftarrow r + j * j$

Opgave 22 (4 %)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme SumOfSquares.

	Ja	Nej
$j \leq n$	☒	☐
$r = j^2$	☐	☒
$r^2 \leq n^2$	☐	☒
$r = j(j+1)/2$	☐	☒
$r \leq n^2$	☐	☒

Opgave 23 (4 %)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme SumOfSquares.

	Ja	Nej
$\mu(j, r) = j$	☐	☒
$\mu(j, r) = n - j$	☒	☐
$\mu(j, r) = n^2/r$	☐	☒
$\mu(j, r) = n^2 - r$	☐	☒
$\mu(j, r) = (n - j)^2$	☒	☐

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 24 (4 %)

Givet et positivt heltal n, så beregner nedenstående algoritme summen

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_i og I_r være invarianter omkring variablerne i og r. Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke).

Algoritme Sum(n)
Inputbetingelse : positivt heltal $n \geq 1$
Outputkrav : $r = \sum_{j=1}^{n} j^3$
Metode : $i \leftarrow n - 1$;
$r \leftarrow n * n * n$;
$\{I_i \ \wedge \ I_r\}$ **while** $i \geq 1$ **do**
$r \leftarrow r + i * i * i$;
$i \leftarrow i - 1$;

Svar I_i: $0 \leq i \leq n - 1$

Svar I_r: $r = \sum_{j=i+1}^{n} j^3$

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ: i

Opgave 25 (4 %)

Betragt en kø implementeret ved hjælp af to stakke *head* and *tail*, som hver understøtter push og pop i worst-case O(1) tid. For en tom kø er $tail = head = \emptyset$. Enqueue og Dequeue implementeres ved hjælp af følgende metoder.

Algoritme Enqueue(x)
Metode : push($tail$, x)

Algoritme Dequeue()
Inputbetingelse : $|head| + |tail| \geq 1$
Metode : **if** $|head| = 0$ **then**
while $|tail| > 0$ **do**
push($head$, pop($tail$))
return pop($head$)

For at argumentere at operationerne tager amortiseret $O(1)$ tid kræves en potentiale funktion. Angiv en potentiale funktion hvorved tiden kan bevises. Argumentation for tiden kræves ikke.

Svar $\Phi(head, tail)$: $|tail|$