EKSAMEN

Algoritmer og Datastrukturer

Mandag 6. januar 2025, 9:00–11:00

Institut for Datalogi, Naturvidenskabelige Fakultet, Aarhus Universitet

Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 16

Tilladte medbragte hjælpemidler: **Ingen**

Kun det separate svarark skal udfyldes og afleveres.

Denne opgaveformulering skal *ikke* afleveres.

Vejledning og pointgivning

Dette eksamenssæt består af en mængde multiple-choice-opgaver.

Svarene på opgaverne angives på det **separate svarark som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

Hvert delspørgsmål har præcist et rigtigt svar.

For hvert delspørgsmål må du vælge **max ét svar** ved at afkrydse den tilsvarende rubrik.

Et delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en opgave med vægt $v\,\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af opgaven som:

$$\frac{s}{n} \cdot v\,\%$$

Bemærk at det er muligt at få negative point for en opgave.

Opgave 1 (Asymptotisk notationer, 6 %) check

I det følgende angiver $\log n$ 2-tals-logaritmen af n.

	Ja	Nej
$n \log n + n\sqrt{n}$ er $O(n^2)$		
$7n \cdot \log n$ er $O(n^{2/3} \cdot n^{1/3})$		
$n^{2/3}$ er $O(n \cdot \log n)$		
$7 \log(n!)$ er $O(n^3)$		
3^n er $O(n^3)$		
$n^{0.1}$ er $O((\log n)^{10})$		
$\sqrt{n} + 6n$ er $O(n \cdot \log n)$		
n^2 er $O(\sum_{i=1}^{n} i)$		
$(\log n)^2$ er $O(n)$		
n^2 er $\Omega(2^{2 \log n})$		
n^3 er $\Theta(3^{\log n})$		
$\log n$ er $\Omega(n\sqrt{n})$		

Opgave 2 (Analyse af løkker, 6 %) check

```
Algoritme loop1(n)
  for i = 1 to n
      j = i
      while j ≥ 1
          j = ⌊j/2⌋
```

```
Algoritme loop2(n)
  s = 1
  for i = n to 1 step −1
      for j = i to 2 ∗ i
          s = s + 1
```

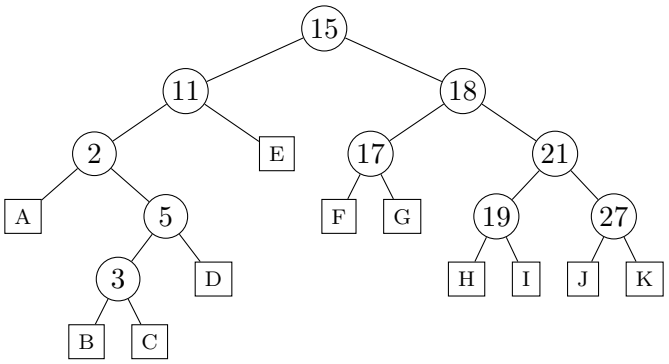
```
Algoritme loop3(n)
  i = 1
  j = n
  while i < j
      i = 2 ∗ i
      j = j + 1
```

```
Algoritme loop4(n)
  i = 0
  while i ∗ i ≤ n
      j = 0
      while j ≤ i
          j = j + 1
      i = i + 1
```

Angiv for hver af ovenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i Θ-notation.

	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^3)$	$\Theta(2^n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n\sqrt{n})$	$\Theta(n^2)$	$\Theta((\log n)^2)$
loop1								
loop2								
loop3								
loop4								

Opgave 3 (Indsættelse i søgetræer, 4 %) **check**



Angiv i hvilke blade A–K i ovenstående ubalancerede binære søgetræ elementerne 6, 4, 26, 20 og 8 skal indsættes (det antages at før hver indsættelse indeholder træet kun ovenstående ti elementer).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
INSERT(6)											
INSERT(4)											
INSERT(26)											
INSERT(20)											
INSERT(8)											

Opgave 4 (Max-Heap-Insert, 4 %) **check**

Angiv den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 13, 4, 11, 8, 10, 3 og 14 i den givne rækkefølge med MAX-HEAP-INSERT, startende med den tomme heap.

1	2	3	4	5	6	7
14	10	13	4	8	3	11

1	2	3	4	5	6	7
14	13	11	10	8	4	3

1	2	3	4	5	6	7
14	10	13	8	4	3	11

1	2	3	4	5	6	7
13	10	14	8	4	3	11

1	2	3	4	5	6	7
13	4	11	8	10	3	14

Opgave 5 (Heap-Extract-Max, 4 %) **check**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
26	25	22	15	21	18	7	12	6	11	13	14	16

Hvad er resultatet af HEAP-EXTRACT-MAX på ovenstående max-heap ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25	22	16	21	18	15	12	6	11	13	14	7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
25	21	22	15	13	18	7	12	6	11		14	16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25	21	22	15	13	18	7	12	6	11	14	16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25	21	22	15	13	18	7	12	6	11	16	14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25	21	22	15	16	18	7	12	6	11	13	14

Opgave 6 (Interval rapportering i binære søgetræer, 4 %) **check**

Antag vi har et binært søgetræ indeholdende n elementer og træet har højde h (træet er ikke nødvendigvis balanceret). Nedenstående algoritme rapporterer alle elementer i intervallet $[\ell, r]$, som er indeholdt i et binært søgetræ med rod v.

```
Algoritme report(v, ℓ, r)
    if v ≠ NIL then
        if ℓ ≤ v.key then
            report(v.left, ℓ, r)
        if ℓ ≤ v.key ≤ r then
            print v.key
        if v.key ≤ r then
            report(v.right, ℓ, r)
```

Hvad er algoritmens worst-case udførselstid, når k betegner antallet af elementer der rapporteres?

$$\Theta(k) \quad \Theta(k + \log n) \quad \Theta(k + h) \quad \Theta(k \cdot \log n) \quad \Theta(k \cdot h)$$

Opgave 7 (Lineær probing, 4 %) **check**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	22	8						21		18

I ovenstående hashtabel af størrelse 11 er anvendt *lineær probing* med hashfunktionen $h(k) = 3k \bmod 11$.

Angiv positionerne de fem elementer 1, 2, 3, 7 og 11 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 0, 8, 18, 21 og 22).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
INSERT(1)											
INSERT(2)											
INSERT(3)											
INSERT(7)											
INSERT(11)											

Opgave 8 (Dobbelt hashing, 4 %) **check**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		8		16			21	10	14	

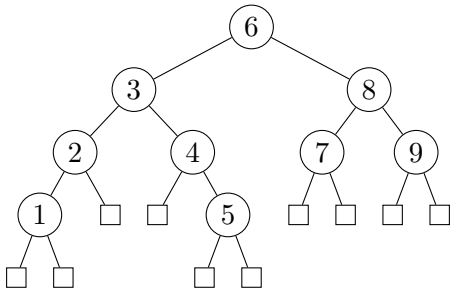
I ovenstående hashtabel af størrelse 11 er anvendt *dobbelt hashing* med hashfunktionerne $h_1(k) = 3k \bmod 11$ og $h_2(k) = 1 + (4k \bmod 10)$.

Angiv positionerne de fem elementer 2, 3, 5, 6 og 7 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 8, 10, 14, 16 og 21).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
INSERT(2)											
INSERT(3)											
INSERT(5)											
INSERT(6)											
INSERT(7)											

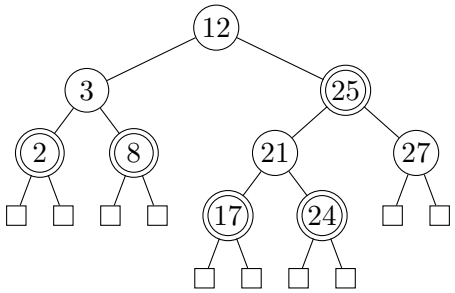
Opgave 9 (Rød-sorte træer, 4 %) **check**

For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde.

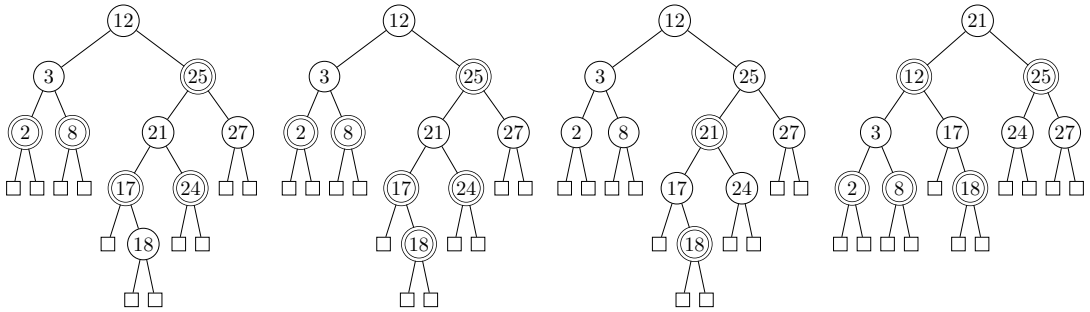


	Ja	Nej
1, 5, 6		
1, 2, 4, 5, 7, 9		
1, 3, 5, 7, 9		
1, 5		
1, 3, 5, 8		

Opgave 10 (Indsættelse i rød-sorte træer, 4 %) **check**



Angiv det resulterende rød-sorte træ når man indsætter 18 i ovenstående rød-sorte træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder).



Opgave 11 (Rekursionsligninger, 4 %) **check**

Angiv løsningen for hver af nedenstående rekursionsligninger, hvor $T(n) = 1$ for $n \leq 1$.

$$\Theta(\log n) \quad \Theta(\sqrt{n}) \quad \Theta(n) \quad \Theta(n \log n) \quad \Theta(n^2) \quad \Theta(n^2 \log n) \quad \Theta(n^3)$$

$T(n) = 3 \cdot T(n/5) + n$

$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + 2$

$T(n) = 4 \cdot T(n/5) + n$

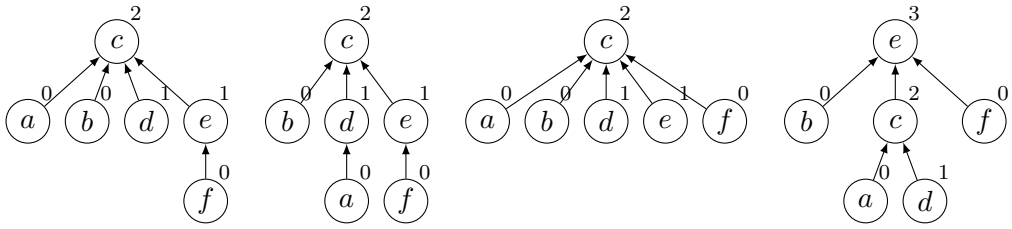
$T(n) = T(n-1) + n^2$

$T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + n$

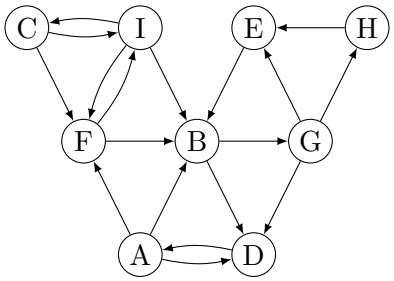
Opgave 12 (Union-find, 4 %) **check**

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering.

MAKESET(a)
MAKESET(b)
MAKESET(c)
MAKESET(d)
MAKESET(e)
MAKESET(f)
UNION(a, d)
UNION(b, c)
UNION(d, c)
UNION(f, e)
UNION(a, f)
FIND-SET(b)



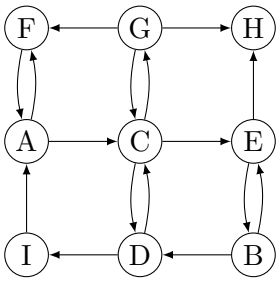
Opgave 13 (BFS, 4 %) **check**



For et bredde først gennemløb (BFS) af ovenstående graf **startende i knuden A**, angiv rækkefølgen knuderne bliver indsat i køen Q i BFS-algoritmen. Det antages, at grafen er givet ved incidenslister, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

A B D F G I H E C A D F B I G C E H A B D G E H F I C A B D F G I E H C

Opgave 14 (DFS, 4 %) **check**



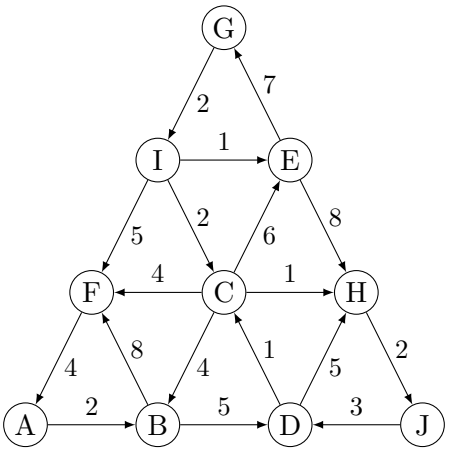
Betragt et dybde først gennemløb (DFS) af ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i **knuden A**, hvor de udgående kanter til en knude besøges i alfabetisk rækkefølge. Angiv i hvilken rækkefølge knuderne får tildelt **finishing time**.

I D B H E F G C A H B I G E D F C A F I D B H E G C A F G H B E I D C A

Angiv for hver af nedenstående kanter hvilken type kanten bliver i DFS gennemløbet.

	Tree edge	Back edge	Cross edge	Forward edge
(B, D)				
(C, D)				
(A, F)				
(G, C)				

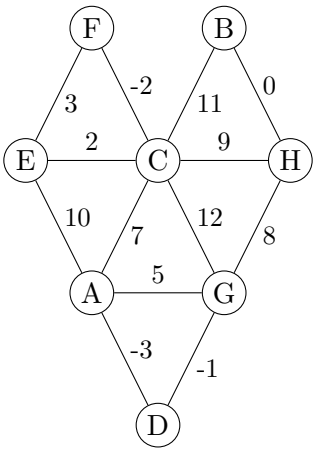
Opgave 15 (Dijkstras algoritme, 4 %) **check**



Antag Dijkstras algoritme anvendes til at finde korteste afstande fra **knuden A** til alle knuder i ovenstående graf. Angiv hvilken rækkefølge knuderne bliver taget ud af prioritetskøen i Dijkstras algoritme.

A B D C E G I F H J A B D C H F J E G I A B D F C H E J G I A B D C H J F E G I

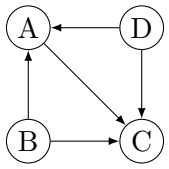
Opgave 16 (Kruskals algoritme, 4 %) **check**



Antag Kruskals algoritme anvendes til at finde et minimum udspændende træ for ovenstående graf. Angiv hvilken kant **sidst** inkluderes i det minimum udspændende træ.

(A , C) (C , E) (B , H) (E , F) (G , H)

Opgave 17 (Topologisk sortering, 4 %) **check**



Angiv for hver af nedenstående ordninger af knuderne i ovenstående graf om det er en lovlig topologisk sortering.

	Ja	Nej
D A B C		
D B C A		
D B A C		
B D A C		
A D B C		

Opgave 18 (Korteste veje, 4 %) **check**

Antag at Bellman-Ford algoritmen anvendes til at finde korteste veje fra en start knude til alle andre knuder i en graf. Hvad er worst-case antal RELAX operationer Bellman-Ford algoritmen kan lave på grafer med n knuder og $O(n)$ vægtede kanter?

$\Theta(n)$ $\Theta(n \log n)$ $\Theta(n^2)$ $\Theta(n^2 \log n)$ $\Theta(n^3)$

Opgave 19 (Invarianter, 4 %) **check**

Givet en *konkav* liste af n forskellige reelle tal $L[1..n]$, så beregner nedenstående algoritme maximum i listen. En liste er konkav hvis $L[i+1] - L[i] < L[i] - L[i-1]$, for $1 < i < n$.

F.eks. er listen $25, 100, 147, 174, 108, -56$ konkav.

Algoritme ConcaveMax($L[1..n]$)
Inputbetingelse : $n \geq 1$, alle $L[i] \in \mathbb{R}$ er forskellige, og
: $L[i+1] - L[i] < L[i] - L[i-1]$ for $1 < i < n$
Outputkrav : $L[low] = \max(L)$
Metode : $low \leftarrow 1$
$high \leftarrow n$
$\{I\}$ **while** $low < high$ **do**
$mid \leftarrow \lfloor (low + high)/2 \rfloor$
if $L[mid] < L[mid+1]$ **then**
$low \leftarrow mid + 1$
else
$high \leftarrow mid$

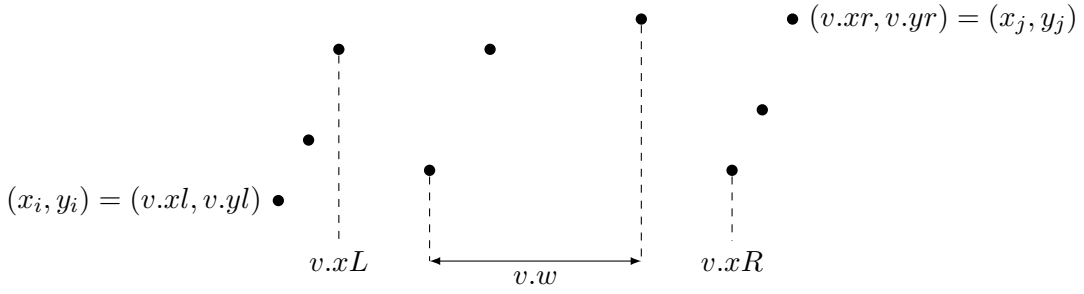
For hvert af følgende udsagn, angiv om det er en invariant I for algoritmen ConcaveMax, hvor $i_{\max}$ er indekset i L hvor $L[i_{\max}] = \max(L)$.

	Ja	Nej
$low < high$		
$low - 1 \leq high$		
$low \leq i_{\max} \leq high$		
$low < i_{\max} < high$		
$1 \leq low \leq i_{\max} \leq high \leq n$		

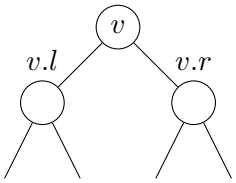
Opgave 20 (Udvidede søgetræer, 4 %) **check**

Betragt n punkter $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ i $\mathbb{R}^2$, hvor $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. En *sammenhængende delsekvens* af $j - i + 1$ punkter $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), \ldots, (x_j, y_j)$, hvor $1 \leq i \leq j \leq n$, siges at være *voksende* hvis og kun hvis $y_i < y_{i+1} < \cdots < y_j$ og *bredden* af delsekvensen er $x_j - x_i$. Vi ønsker at vedligeholde den maksimale bredde af en voksende sammenhængende delsekvens i en dynamisk mængde af punkter ved hjælp af et udvidet søgetræ.

Betragt et søgetræ hvor hver knude v gemmer et punkt $(v.x, v.y)$, og knuderne er ordnet venstre-mod-højre efter stigende $v.x$. Derudover gemmes i v reelle tal $v.w$, $v.xR$ og $v.xL$, $v.xl$, $v.yl$, $v.xr$ og $v.yr$. Hvis v's undertræ gemmer punkterne $(x_i, y_i), \ldots, (x_j, y_j)$, så er $(v.xl, v.yl) = (x_i, y_i)$, $(v.xr, v.yr) = (x_j, y_j)$, $v.w$ er den maksimale bredde af en sammenhængde voksende delsekvens af punkterne, $v.xR = x_s$ hvor (x_s, y_s) er det punkt længst til venstre, hvor $i \leq s \leq j$ og $(x_s, y_s), \ldots, (x_j, y_j)$ er voksende, og symmetrisk er $v.xL = x_t$ hvor (x_t, y_t) er det punkt længst til højre, hvor $i \leq t \leq j$ og $(x_i, y_i), \ldots, (x_t, y_t)$ er voksende. Bemærk at hvis alle punkterne udgør en voksende delsekvens, så er $v.xL = v.xr$ og $v.xR = v.xl$.



Angiv hvorledes $v.w$ kan beregnes når ovenstående information er kendt ved de to børn $v.l$ og $v.r$ (det kan antages at disse begge eksisterer). For to tal $a, b \in \mathbb{R}$ lader vi $\text{inc}(a, b) = 1$ hvis $a < b$, ellers er $\text{inc}(a, b) = 0$.



Hvilket af nedenstående udtryk beregner $v.w$?

$\max(v.l.w, v.r.w, v.r.xL - v.l.xR)$

$\max(v.l.w, v.r.w, \text{inc}(v.l.y, v.y) \cdot (v.r.xL - v.l.xL) + \text{inc}(v.y, v.r.y) \cdot (v.r.xR - v.l.xR))$

$\max(v.l.w, v.r.w, \text{inc}(v.l.yr, v.y) \cdot (v.x - v.l.xR) + \text{inc}(v.y, v.r.yl) \cdot (v.r.xL - v.x))$

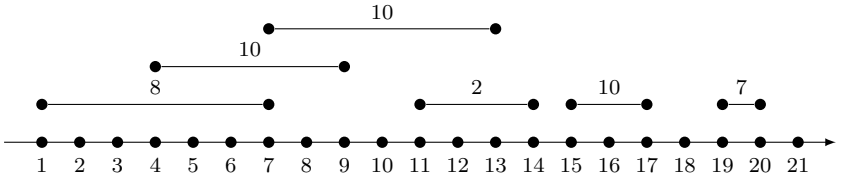
$\max(v.l.w, v.r.w, v.l.w + v.r.w + \text{inc}(v.l.y, v.y) \cdot (v.x - v.l.x) + \text{inc}(v.y, v.r.y) \cdot (v.r.x - v.x))$

Dynamisk programmering

Antag vi har n vægtede intervaller $(l_1, r_1, w_1), \ldots, (l_n, r_n, w_n)$, hvor det $i$te interval er $[l_i, r_i]$ med vægt w_i, og $l_i, r_i, w_i \in \mathbb{R}$ med $l_i < r_i$. Det antages at intervallerne er sorteret efter højre endepunkt, dvs. $r_1 \leq \cdots \leq r_n$. I denne opgave ønsker vi at finde en ikke overlappende delmængde af intervallerne, som har størst mulig samlet vægt vha. dynamisk programmering (overlap i endepunkterne er ikke tilladt).

F.eks. for de 6 intervaller

$$(1,7,8), (4,9,10), (7,13,10), (11,14,2), (15,17,10), (19,20,7)$$



opnår intervallerne $(4,9,10), (11,14,2), (15,17,10), (19,20,7)$ vægten 29.

Lad W_i betegne den maksimale vægt man kan opnå med en delmængde af de i første intervaller, hvor $0 \leq i \leq n$, som kan beregnes ved følgende rekursionsformel, hvor vi antager $r_0 = -\infty$:

$$W_i = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i = 0 \\ \max(\{W_{i-1}\} \cup \{W_j + w_i \mid 0 \leq j < i \wedge r_j < l_i\}) & \text{hvis } 1 \leq i \leq n\,. \end{cases}$$

De følgende 3 opgaver består i at udfylde 3 blokke i følgende algoritmeskabelon.

Algoritme DisjunkteIntervaller($(l_1, r_1, w_1), \ldots, (l_n, r_n, w_n)$))
Opret tabel $W[0\,..\,n]$ hvor alle indgange har værdien 0

for ...
≪ **Opgave 21**: iterer over W ≫

≪ **Opgave 22**: beregn $W[i]$ ≫

≪ **Opgave 23**: Udskriv intervaller med maksimal vægt sum ≫

Opgave 21 (4 %)

check

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

	Ja	Nej
for $i = 1$ **to** n		
for $i = n$ **to** 1 **step** -1		

Opgave 22 (4 %) check

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

Ja Nej

```
for j = 0 to i − 1
  if W[j] + w_i > W[i] then
    W[i] = max(W[i − 1], W[j] + w_i)
```

```
W[i] = W[i − 1]
for j = 0 to i − 1
  if r_j < l_i and W[j] + w_i > W[i] then
    W[i] = W[j] + w_i
```

```
W[i] = W[i − 1]
for j = i − 1 to 0 step −1
  if r_j < l_i and W[j] + w_i > W[i] then
    W[i] = W[j] + w_i
```

Opgave 23 (4 %) check

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

Ja Nej

```
for i = 1 to n
  if W[i − 1] < W[i] then
    print (l_i, r_i)
```

```
for i = n to 1 step −1
  if W[i − 1] < W[i] then
    print (l_i, r_i)
```

```
z = W[n]
for i = n to 1 step −1
  if W[i − 1] < z then
    print (l_i, r_i)
    z = z − w_i
```

Opgave 24 (SUCCESSOR struktur, 4 %) **check**

Antag vi ønsker at vedligeholde en datastruktur for en mængde af positive heltal S. I starten er $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, som oprettes med CREATESET(n). Operationerne på S er DELETE(i), som fjerner i fra S, og SUCCESSOR(i), som returnerer det mindste tal i S der er større end eller lig med i. Vi antager at for Delete(i) er $i \in S$, og $1 \leq i < n$ for både DELETE(i) og SUCCESSOR(i), dvs. n slettes aldrig.

Vi antager operationerne er implementeret ved følgende kode, som vedligeholder et array $A[1..n]$. Hvis $i \in S$ er $A[i] = i$. Ellers er $i < A[i]$ og $j \notin S$ for $i \leq j < A[i]$.

```
proc CreateSet(n)
  for i = 1 to n do
    A[i] = i

proc Delete(i)
  A[i] = i + 1

proc Successor(i)
  if A[i] ≠ i then
    A[i] = Successor(A[i])
  return A[i]
```

Nedenstående er et eksempel på en datastruktur for mængden $\{1, 12, 15, 17, 19, 20\}$, efter en sekvens af operationer.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	**1**	12	7	5	11	7	12	11	10	11	12	**12**	15	15	**15**	17	**17**	19	**19**	**20**

Et kald til SUCCESSOR(4) vil returnere 12, og ændre $A[4] = 12$ og $A[5] = 12$.

Hvad er worst-case tiden for CREATESET(n) fulgt af en sekvens af en blanding af $n - 1$ DELETE og n SUCCESSOR operationer?

$$\Theta(n) \quad \Theta(n \cdot \alpha(n)) \quad \Theta(n \cdot \log n) \quad \Theta(n \cdot \sqrt{n}) \quad \Theta(n^2)$$

I ovenstående betegner $\alpha(n)$ den meget langsomt voksende inverse Ackermann funktion, som indgår i analyses af union-find datastrukturer, der anvender stikomprimering og linking ved rang, hvor m union-find operationer på n elementer tager tid $O(m \cdot \alpha(n))$.