**EKSAMEN**

## Algoritmer og Datastrukturer

**Fredag 22. januar 2021, 9:00–11:00**

Institut for Datalogi, Naturvidenskabelige Fakultet, Aarhus Universitet

Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 14

Tilladte hjælpemidler:
**Alle, inklusive internet.**
**Det er ikke tilladt at kommunikere med andre under eksamen.**

**Studienummer :** ________________

**Navn :** ________________________________

# Vejledning og pointgivning

Dette eksamenssæt består af en mængde multiple-choice-opgaver.

Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

Hvert delspørgsmål har præcist et rigtigt svar.

For hvert delspørgsmål må du vælge **max ét svar** ved at afkrydse den tilsvarende rubrik.

Et delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor $k$ er antal svarmuligheder.

For en opgave med vægt $v\,\%$ og med $n$ delspørgsmål, hvor du opnår samlet $s$ point, beregnes din besvarelse af opgaven som:

$$\frac{s}{n} \cdot v\,\%$$

Bemærk at det er muligt at få negative point for en opgave.

## Opgave 1 (Asymptotisk notation, 6 %)

I det følgende angiver $\log n$ 2-tals-logaritmen af $n$.

| | Ja | Nej |
|---|---|---|
| $3n^{3/2} + \log n$ er $O(n^{2/3})$ | A | B |
| $2(\log n)^4$ er $O(n^2)$ | A | B |
| $\sqrt{n} \cdot \log n$ er $O(n)$ | A | B |
| $6n^{3/2}$ er $O(8^{\log n})$ | A | B |
| $4\log(n^6)$ er $O((\log n)^2)$ | A | B |
| $2^{2\log n}$ er $O(\log(n!))$ | A | B |
| $n^2$ er $O(n^{3/2})$ | A | B |
| $n^{0.1}$ er $O(n)$ | A | B |
| $n$ er $O(n^{1/3})$ | A | B |
| $\sqrt{n}$ er $\Theta(n \cdot \log n)$ | A | B |
| $n^{2/3}$ er $\Omega(n)$ | A | B |
| $n^2$ er $\Theta(n^{0.1})$ | A | B |

## Opgave 2 (Analyse af løkker, 6 %)

**Algoritme** loop1($n$)
  $s = 1$
  **for** $i = 1$ **to** $n$
    **for** $j = 1$ **to** $i$
      **for** $k = j$ **to** $i$
        $s = s + 1$

**Algoritme** loop2($n$)
  $i = 0$
  $j = n$
  **while** $i < j$
    $i = i + 2$
    $j = j + 1$

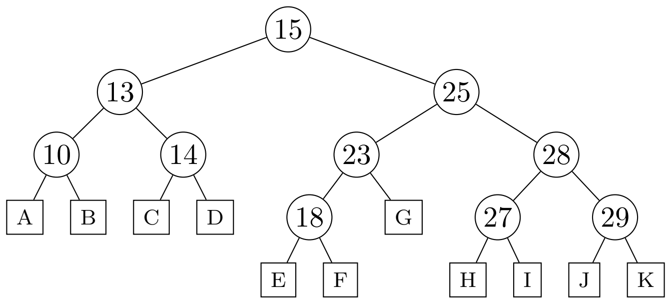
**Algoritme** loop3($n$)
  $i = 1$
  $j = n$
  **while** $i < j$
    $i = 2 * i$
    $j = j + n$

**Algoritme** loop4($n$)
  $i = n$
  $j = 0$
  **while** $i > 0$
    **if** $j < i$
      $j = j + 1$
    **else**
      $j = 0$
      $i = i - 1$

Angiv for hver af ovenstående algoritmer udførselstiden som funktion af $n$ i $\Theta$-notation.

| | $\Theta(n^3)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(\sqrt{n})$ | $\Theta(n)$ | $\Theta((\log n)^2)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(2^n)$ | $\Theta(\log n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| loop1 | A | B | C | D | E | F | G | H |
| loop2 | A | B | C | D | E | F | G | H |
| loop3 | A | B | C | D | E | F | G | H |
| loop4 | A | B | C | D | E | F | G | H |

**Opgave 3 (Indsættelser i søgetræer, 4 %)**




Angiv i hvilke blade A–K i ovenstående ubalancerede binære søgetræ elementerne 22, 17, 26, 30 og 16 skal indsættes (det antages at før hver indsættelse indeholder træet kun ovenstående ti elementer).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| INSERT(22) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| INSERT(17) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| INSERT(26) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| INSERT(30) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| INSERT(16) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |

**Opgave 4 (Build-Max-Heap, 4 %)**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 3 | 8 | 2 | 9 | 5 | 7 | 4 |

Hvad er resultat af BUILD-MAX-HEAP på ovenstående array ?

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | A |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | B |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 9 | 7 | 2 | 3 | 5 | 1 | 4 | C |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 6 | 7 | 2 | 3 | 5 | 1 | 4 | D |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 8 | 6 | 2 | 3 | 5 | 1 | 4 | E |

### Opgave 5 (Heap-Extract-Max, 4 %)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 19 | 17 | 14 | 16 | 15 | 13 | 3 | 9 | 2 | 8 | 4 | 11 |

Hvad er resultat af HEAP-EXTRACT-MAX på ovenstående max-heap ?

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 16 | 17 | 14 | 8 | 15 | 13 | 3 | 9 | 2 | | 4 | 11 | A |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 16 | 17 | 14 | 8 | 15 | 13 | 3 | 9 | 2 | 4 | 11 | B |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 16 | 17 | 14 | 8 | 15 | 13 | 3 | 9 | 2 | 11 | 4 | C |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 16 | 17 | 14 | 11 | 15 | 13 | 3 | 9 | 2 | 8 | 4 | D |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 17 | 14 | 16 | 15 | 13 | 3 | 9 | 2 | 8 | 4 | 11 | E |

### Opgave 6 (Lineær probing, 4 %)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | | | | 9 | 13 | 2 | | | 18 |

I ovenstående hashtabel af størrelse 11 er anvendt *linear probing* med hashfunktionen $h(k) = 3k \bmod 11$.

Angiv positionerne de fem elementer 4, 5, 6, 7 og 11 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 2, 9, 13, 15 og 18).

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| INSERT(4) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| INSERT(5) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| INSERT(6) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| INSERT(7) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| INSERT(11) | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |

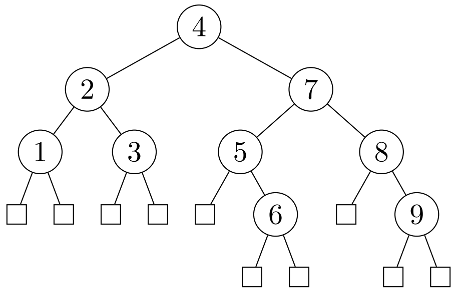
### Opgave 7 (Merge-Sort, 4 %)

Antag MERGE-SORT udføres på et input af størrelse $n$ og indeholdende to elementer $x$ og $y$. Hvad er worst-case antal sammenligninger af $x$ med $y$ under udførelsen af MERGE-SORT?

| $\Theta(1)$ | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n^2)$ |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |

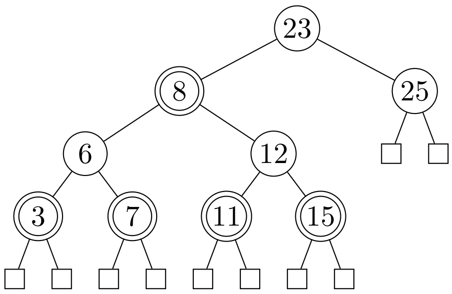
**Opgave 8 (Rød-sort træ, 4 %)**

For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde.

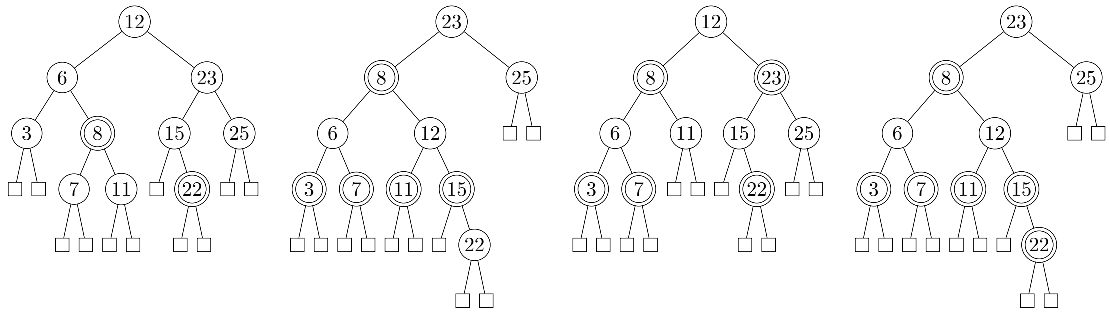


| | Ja | Nej |
|---|---|---|
| 6, 9 | A | B |
| 2, 6, 7, 9 | A | B |
| 2, 5, 6, 8, 9 | A | B |
| 1, 3, 6, 7, 9 | A | B |
| 4, 6, 9 | A | B |

**Opgave 9 (Indsættelse i rød-sort træer, 4 %)**



Angiv det resulterende rød-sorte træ når man indsætter 22 i ovenstående rød-sorte træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder).

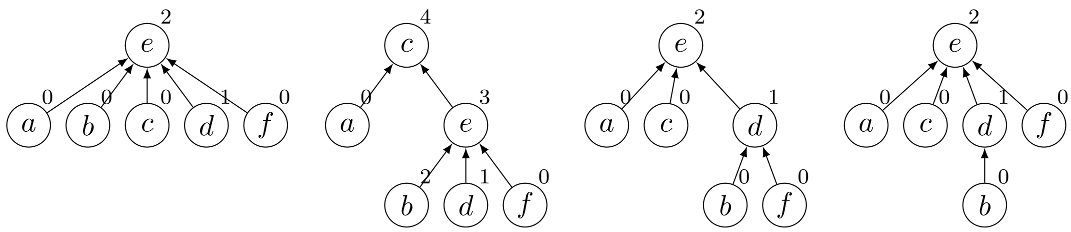


A B C D

**Opgave 10 (Union-find, 4 %)**

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering.

MAKESET($a$)
MAKESET($b$)
MAKESET($c$)
MAKESET($d$)
MAKESET($e$)
MAKESET($f$)
UNION($f$, $d$)
UNION($f$, $b$)
UNION($a$, $e$)
UNION($b$, $a$)
UNION($f$, $c$)
FIND-SET($a$)



A B C D

**Opgave 11 (Rekursionsligninger, 4 %)**

Angiv løsningen for hver af nedenstående rekursionsligninger, hvor $T(n) = 1$ for $n \leq 1$.

| | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\sqrt{n})$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^2 \log n)$ | $\Theta(n^3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(n) = 4 \cdot T(n/4) + n$ | A | B | C | D | E | F | G |
| $T(n) = 4 \cdot T(n/2) + 2$ | A | B | C | D | E | F | G |
| $T(n) = 3 \cdot T(n/9) + 1$ | A | B | C | D | E | F | G |
| $T(n) = T(n-1) + 3$ | A | B | C | D | E | F | G |
| $T(n) = T(n/3) + 2$ | A | B | C | D | E | F | G |

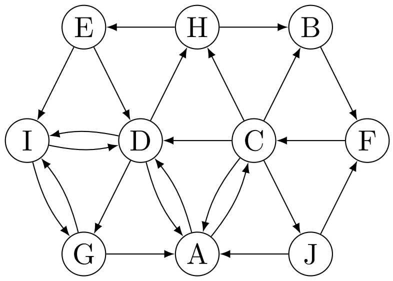
**Opgave 12 (Alle-par-korteste-veje, 4 %)**

Antag vi har en orienteret graf med $n$ knuder og postitivt vægtede kanter, hvor vi løbende tilføjer yderligere kanter. Vi ønsker at vedligeholde en afstands-tabel over de korteste afstande mellem alle par af knuder.

Hvad er den bedste worst-case tid man kan opnå for at opdatere afstands-tabellen, når man tilføjer en ny kant med positiv vægt til grafen?

| $\Theta(1)$ | $\Theta(\sqrt{n})$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n \cdot \log n)$ | $\Theta(n \cdot \sqrt{n})$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G |

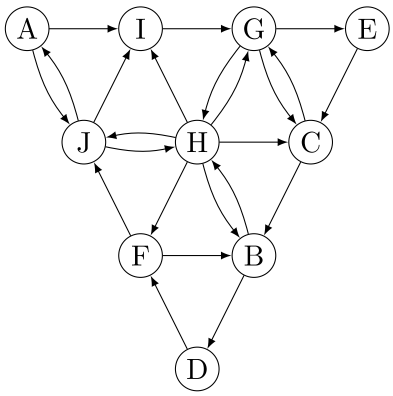
**Opgave 13 (BFS, 4 %)**




For et bredde først gennemløb (BFS) af ovenstående graf **startende i knuden A**, angiv rækkefølgen knuderne bliver indsat i køen $Q$ i BFS-algoritmen. Det antages, at grafen er givet ved incidenslister, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

| A C D B H J I G F E | A C D B H J G I F E | A C B F D G I H E J | A C D J H B I G F E |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |

**Opgave 14 (DFS, 4 %)**



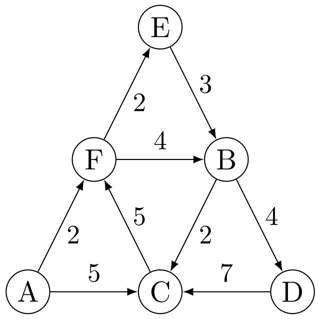

Betragt et dybde først gennemløb (DFS) af ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i **knuden A**, hvor de udgående kanter til en knude besøges i alfabetisk rækkefølge. Angiv i hvilken rækkefølge knuderne får tildelt **finishing time**.

| D F B E C H G J I A | E H J F D B C G I A | E G F D B C I H J A | H J F D B C E G I A |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |

Angiv for hver af nedenstående kanter hvilken type kanten bliver i DFS gennemløbet.

| | Tree edge | Back edge | Cross edge | Forward edge |
|---|---|---|---|---|
| (E, C) | A | B | C | D |
| (A, J) | A | B | C | D |
| (J, A) | A | B | C | D |
| (J, H) | A | B | C | D |

**Opgave 15 (Dijkstras algoritme, 4 %)**

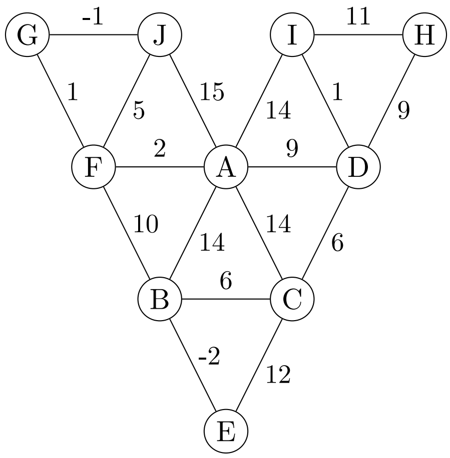



Antag Dijkstras algoritme anvendes til at finde korteste afstande fra **knuden A** til alle knuder i ovenstående graf. Angiv hvilken rækkefølge knuderne bliver taget ud af prioritetskøen i Dijkstra's algoritme.

A C F B E D   A F E B C D   A F E C B D   A C F B D E

A  B  C  D

**Opgave 16 (Prims algoritme, 4 %)**

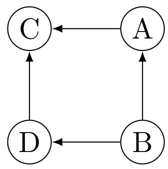



Antag Prims algoritme anvendes til at finde et minimum udspændende træ for ovenstående graf, og algoritmen starter i **knuden A**. Angiv hvilken rækkefølge knuderne bliver inkluderet i det minimum udspændende træ (taget ud af prioritetskøen i Prims algoritme).

A F G J D I C B E H   A F G J D I C H B E   A F G J B E C D I H   A F G J D I B E C H

A  B  C  D

**Opgave 17 (Topologisk sortering, 4 %)**




Angiv for hver af nedenstående ordninger af knuderne i ovenstående graf om det er en lovlig topologisk sortering.

| | Ja | Nej |
|---|---|---|
| D A B C | A | B |
| B D A C | A | B |
| A B D C | A | B |
| C A D B | A | B |
| B A D C | A | B |

**Opgave 18 (Amortiseret analyse, 4 %)**

En binær max-heap understøtter Max-Heap-Insert og Heap-Extract-Max i worst-case tid $O(\log n)$, hvor $n$ er antal elementer i heapen. Vi vil nu understøtte operationen Delete, der givet en pointer til et element i heapen, sletter elementet fra heapen. Vi implementerer Delete ved blot at markere elementet som slettet i worst-case $O(1)$ tid. Når vi udfører Heap-Extract-Max gentager vi denne indtil det første ikke-markerede element bliver returneret. Dvs. hvis Heap-Extract-Max sletter $D$ markerede elementer bliver worst-case tiden $O((D+1)\log N)$, hvor $N$ er antallet af markerede og ikke-markerede elementer i heapen.

Angiv for hver af nedenstående funktioner om de er en potentialefunktion, hvormed man kan argumentere for at operationerne Max-Heap-Insert, Delete, og Heap-Extract-Max tager amortiseret $O(\log N)$ tid, hvor $M$ betegner antallet af markerede elementer i heapen.

| | Ja | Nej |
|---|---|---|
| $N$ | A | B |
| $M$ | A | B |
| $N \cdot \log N$ | A | B |
| $M \cdot \log N$ | A | B |
| $N \cdot \log M$ | A | B |
| $M \cdot \log M$ | A | B |

## Opgave 19 (Invarianter, 4 %)

Givet et positivt heltal $n$, så beregner nedenstående algoritme $n^3$.

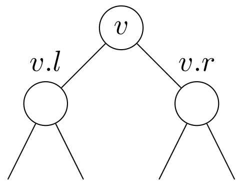
**Algoritme** Power3($n$)
Inputbetingelse : Heltal $n \geq 1$
Outputkrav : $r = n^3$
Metode : $i \leftarrow 1$
$s \leftarrow 1$
$r \leftarrow 1$
$\{I\}$ **while** $i < n$ **do**
  $i \leftarrow i + 1$
  $s \leftarrow s + 2i - 1$
  $r \leftarrow r + 3s - 3i + 1$

For hvert af følgende udsagn, angiv om de er en invariant $I$ for algoritmen Power3.

| | Ja | Nej |
|---|---|---|
| $1 \leq i < n$ | A | B |
| $1 \leq i \leq s \leq r$ | A | B |
| $r = i^3$ | A | B |
| $r = n^3$ | A | B |
| $s = s + 2i - 1$ | A | B |

## Opgave 20 (Udvidede søgetræer, 4 %)

Betragt et søgetræ hvor hver knude $v$ gemmer et tal $v.x$, og knuderne er ordnet venstre-mod-højre efter stigende $v.x$. Derudover gemmes i en knude $v$ tre værdier $v.min$, $v.max$, og $v.closest$. Værdierne $v.min$ og $v.max$ er henholdsvis det mindst og største tal i $v$'s undertræ, og $v.closest$ den mindste difference mellem to tal i $v$'s undertræ. Hvis $v$'s undertræ kun indeholder et tal er $v.closest = +\infty$.




Angiv hvorledes $v.closest$ og kan beregnes når $min$, $max$ og $closest$ værdierne er kendt ved de to børn $v.l$ og $v.r$ (det kan antages at disse begge eksisterer).

$v.closest = \min(v.l.closest, v.r.x - v.l.x, v.r.closest)$ A

$v.closest = \min(v.l.closest, v.x - v.l.min, v.r.max - v.x, v.r.closest)$ B

$v.closest = \min(v.l.closest, v.x - v.l.max, v.r.min - v.x, v.r.closest)$ C

$v.closest = \min(v.l.closest, v.r.min - v.l.max, v.r.closest)$ D

$v.closest = v.r.closest - v.l.closest$ E

## Dynamisk programmering

De næste fire opgaver vedrører at løse *strengkonkatenerings* problemet ved hjælp af dynamisk programmering.

Lad $T$ være en streng af længde $n$, og lad $S_1, S_2, \ldots, S_k$ være $k$ strenge. Vi ønsker at afgøre om $T$ kan skrives som en konkatenation af strenge fra $S_1, S_2, \ldots, S_k$, hvor hvert $S_i$ kan forekomme et vilkårligt antal gange (0, 1, eller flere gange). F.eks. kan strengen

$$T = \underline{\texttt{ABB}}\,\underline{\texttt{BB}}\,\underline{\texttt{D}}\,\underline{\texttt{ABA}}\,\underline{\texttt{BB}}$$

skrives som en konkatenation af strenge fra

$$S_1 = \texttt{ABB} \qquad S_2 = \texttt{ACAA} \qquad S_3 = \texttt{BB} \qquad S_4 = \texttt{ABA} \qquad S_5 = \texttt{D}$$

For $1 \leq j \leq n+1$ lader vi $C(j)$ angive om $T[j \mathinner{..} n]$ kan skrives som en konkatenation af strenge fra $S_1, \ldots, S_k$.

$C(j)$ kan bestemmes ved følgende rekursionsformel.

$$C(j) = \begin{cases} \textbf{sand} & \text{hvis } j = n+1 \\ \textbf{sand} & \text{hvis } j \leq n \text{ og der findes } i \text{ hvor} \\ & \qquad j + |S_i| - 1 \leq n \ \wedge\ C(j + |S_i|) \ \wedge\ S_i = T[j \mathinner{..} j + |S_i| - 1] \\ \textbf{falsk} & \text{ellers} \end{cases}$$

De følgende 4 opgaver består i at udfylde 4 blokke i følgende algoritmeskabelon.

**Algoritme** Concatenation($T, \{S_1, \ldots, S_k\}$)
  $n = |T|$
  Opret tom tabel $D[1 \mathinner{..} n+1]$
  **for** . . .  $\ll$ **Opgave 21**: iterer over $D$ $\gg$
    $\ll$ **Opgave 22**: beregn $D[j] = C(j)$ $\gg$
  $\ll$ **Opgave 23**: sæt *solution* til True eller False $\gg$
  **if** *solution* **then**
    $\ll$ **Opgave 24**: Udskriv en løsning $\gg$
  **else**
    **print** "Not possible"

**Opgave 21 (4 %)**

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

| | Ja | Nej |
|---|---|---|
| **for** $j = 1$ **to** $n + 1$ | A | B |
| **for** $j = n + 1$ **to** $1$ **step** $-1$ | A | B |

**Opgave 22 (4 %)**

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

Ja Nej

```
if j = n + 1 then
  D[j] = True
else if j + |S_i| − 1 ≤ n and D[j + |S_i|] and T[j .. j + |S_i| − 1] = S_i then
  D[j] = True
else
  D[j] = False
```

A B

```
if j = n + 1 then
  D[j] = True
else
  D[j] = False
  for i = 1 to k
    if j + |S_i| − 1 ≤ n and D[j + |S_i|] and T[j .. j + |S_i| − 1] = S_i then
      D[j] = True
```

A B

```
D[j] = True
for i = 1 to k
  if j + |S_i| − 1 ≤ n and D[j + |S_i|] and T[j .. j + |S_i| − 1] ≠ S_i then
    D[j] = False
```

A B

**Opgave 23 (4 %)**

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

| | Ja | Nej |
|---|---|---|
| $solution = D[n+1]$ | A | B |
| $solution = D[1]$ | A | B |
| $solution =$ True<br>**for** $j = 1$ **to** $n$<br>  **if** $D[j] =$ False **then**<br>    $solution =$ False | A | B |

**Opgave 24 (4 %)**

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

| | Ja | Nej |
|---|---|---|
| $j = 1$<br>**while** $j \leq n$ **do**<br>  **for** $i = 1$ **to** $k$<br>    **if** $D[j + \lvert S_i \rvert]$ **then**<br>      $t = i$<br>  **print** $S_t$<br>  $j = j + \lvert S_t \rvert$ | A | B |
| $j = n + 1$<br>**while** $j > 1$ **do**<br>  **for** $i = 1$ **to** $k$<br>    **if** $j - \lvert S_i \rvert + 1 \geq 1$ **and** $D[j - \lvert S_i \rvert]$ **and** $T[j - \lvert S_i \rvert + 1 \,..\, j] = S_i$ **then**<br>      $t = i$<br>  **print** $S_t$<br>  $j = j - \lvert S_t \rvert$ | A | B |
| $j = 1$<br>**while** $j \leq n$ **do**<br>  **for** $i = 1$ **to** $k$<br>    **if** $j + \lvert S_i \rvert - 1 \leq n$ **and** $D[j + \lvert S_i \rvert]$ **and** $T[j \,..\, j + \lvert S_i \rvert - 1] = S_i$ **then**<br>      $t = i$<br>  **print** $S_t$<br>  $j = j + \lvert S_t \rvert$ | A | B |