

INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12 (tolv)
Eksamensdag: Fredag den 16. august 2013, kl. 9.00-11.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort _____

Navn _____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Institut for Datalogi
Aarhus Universitet

Fredag den 16. august 2013, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s}{n} \right\} \cdot v \%$$

Opgave 1 (4%)

	Ja	Nej
$\log n$ er $O(\sqrt{n})$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$27n + n^3$ er $O(28n)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$8 \cdot 2^n$ er $O(n^3)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
n^2 er $O(n^3/\log n)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
n^7 er $O(2^{8 \log n})$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (4%)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O -notationen:

$$\begin{aligned} &n^{1/3} \\ &n^{3/2} \\ &(\log n)^2 \\ &\sqrt{n} \\ &(\frac{1}{2})^n \end{aligned}$$

Svar: _____ $(\frac{1}{2})^n$ $(\log n)^2$ $n^{1/3}$ \sqrt{n} $n^{3/2}$

Opgave 3 (4%)

Angiv for hver af nedenstående tre algoritmer deres worst-case og forventede udførelstid på to typer input.

	InsertionSort	MergeSort	QuickSort
Worst-case tid på en voksende sekvens af n tal	<u>$O(n)$</u>	<u>$O(n \log n)$</u>	<u>$O(n^2)$</u>
Forventede tid på en sekvens af n tilfældige tal	<u>$O(n^2)$</u>	<u>$O(n \log n)$</u>	<u>$O(n \log n)$</u>

Opgave 4 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
for  $i = 1$  to  $n$ 
   $j = 1$ 
  while  $j < i$ 
     $j = 2 * j$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $i = 1$ 
while  $i < n$ 
   $j = 1$ 
  while  $j < n$ 
     $j = 2 * j$ 
   $i = 2 * i$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i = 0$ 
 $j = 0$ 
while  $i < n$ 
  if  $j < n$ 
     $j = j + 1$ 
  else
     $j = 0$ 
     $i = i + 1$ 
```

Svar Loop1: $O(n \cdot \log n)$

Svar Loop2: $O((\log n)^2)$

Svar Loop3: $O(n^2)$

Opgave 5 (4%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $i = 1$ 
 $s = i$ 
while  $s < n$ 
   $i = i + 1$ 
   $s = s + i$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
for  $i = 1$  to  $n$ 
   $s = 0$ 
   $j = 0$ 
  while  $s < i$ 
     $s = s + j$ 
     $j = j + 1$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i = 1$ 
while  $i * i < n$ 
   $i = 2 * i$ 
```

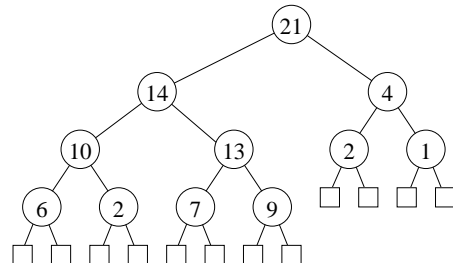
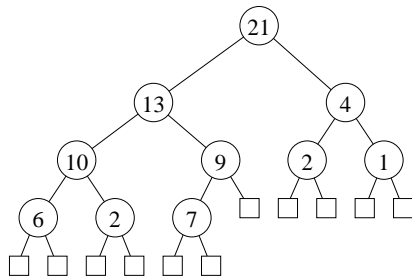
Svar Loop1: $O(\sqrt{n})$

Svar Loop2: $O(n\sqrt{n})$

Svar Loop3: $O(\log n)$

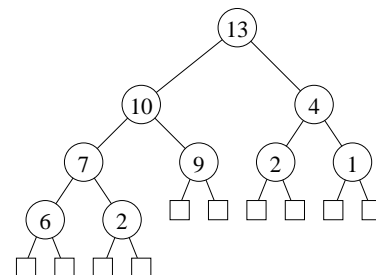
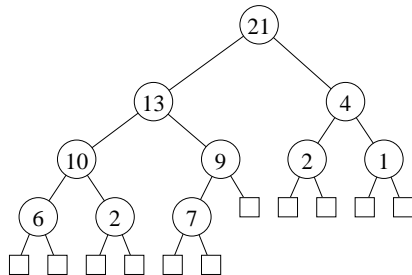
Opgave 6 (4%)

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 14.



Svar: _____

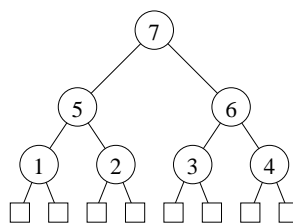
Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en HEAP-EXTRACT-MAX operation.



Svar: _____

Opgave 7 (4%)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 3, 5, 7, 2, 4, og 6 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.



Svar: _____

Opgave 8 (4%)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	1	5	10	6	3	8	7	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	6	8	4	1	3	5	7	2

Svar: _____

Opgave 9 (4%)

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 5, k = 4$). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de *tre* mindst betydende cifre.

12121 31111 23000 31121 31000 11121

Svar: _____ 23000 31000 31111 12121 31121 11121

Opgave 10 (4%)

Angiv resultatet af at anvende PARTITION($A, 2, 14$) på nedenstående array.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	8	16	1	6	2	7	13	17	15	9	5	18	3	11	24	12

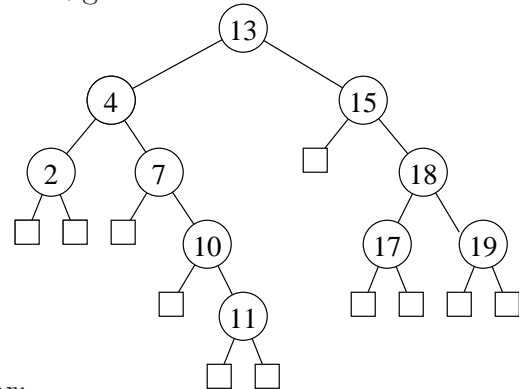
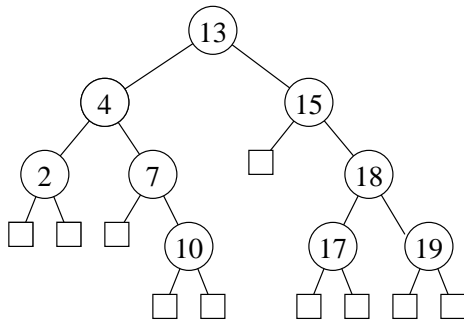


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	8	1	6	2	7	9	5	3	11	16	13	18	17	15	24	12

Svar: _____

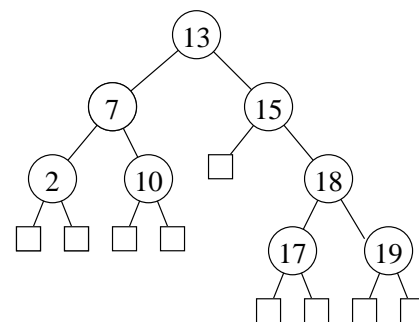
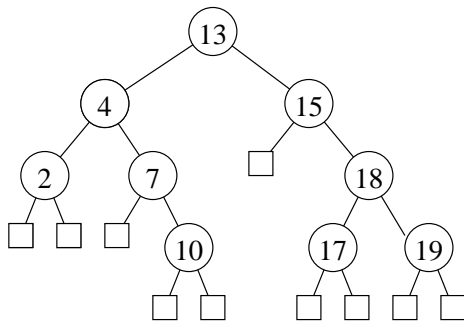
Opgave 11 (4%)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 11.



Svar: _____

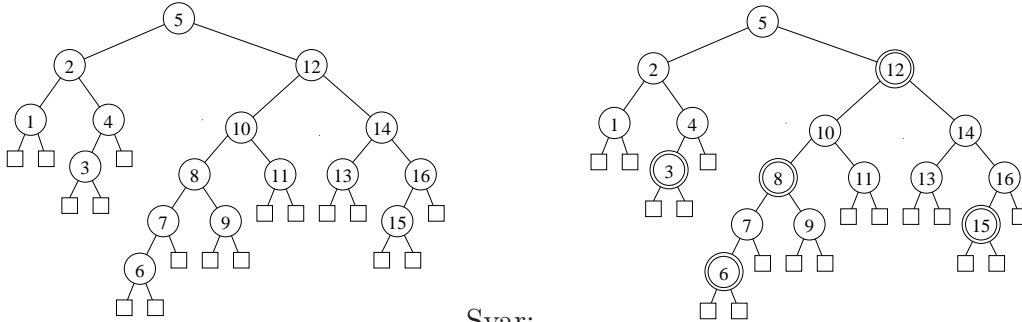
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 4.



Svar: _____

Opgave 12 (4%)

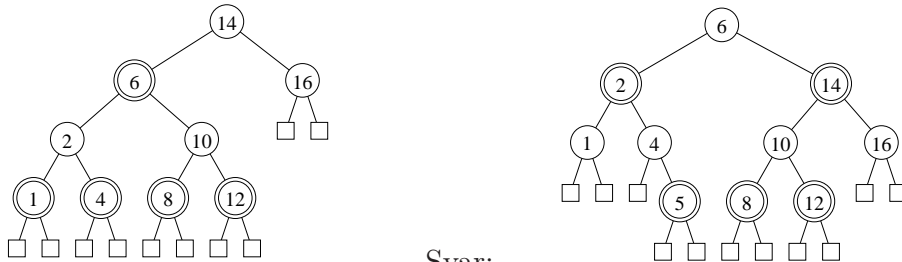
Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.



Svar: _____

Opgave 13 (4%)

Tegn hvordan nedenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 5.



Svar: _____

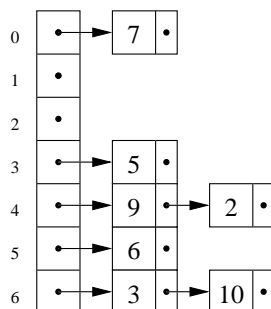
Opgave 14 (4%)

Angiv for hvert af nedenstående udsagn om røde-sort træer om udsagnet er korrekt.

- | | Ja | Nej |
|---|--------------------------|-------------------------------------|
| Højden af et rød-sort træ med n elementer er $\leq 1 \cdot \log n$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Antal røde knuder i et rød-sort træ \leq antal sorte knuder | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Enhver rod-til-blad sti indeholder det samme antal røde knuder | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Knuden i et rød-sort træ med det største element er altid sort | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| For en knude i et rød-sort træ hvor det venstre og højre undertræ indeholder h.h.v. n_l og n_r knuder gælder $\max\{n_l, n_r\} \leq 2 \cdot \min\{n_l, n_r\}$ | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Opgave 15 (4%)

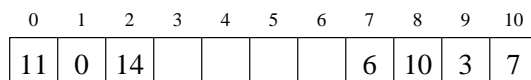
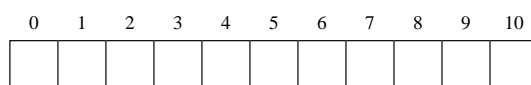
Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hash-funktionen er $h(k) = 2k \bmod 7$, og der indsættes elementerne 10, 2, 7, 6, 5, 3 og 9 i den givne rækkefølge.



Svar: _____

Opgave 16 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *linear probing* ser ud efter at elementerne 3, 11, 7, 6, 0, 10 og 14 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k) = 3k \bmod 11$.



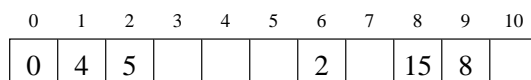
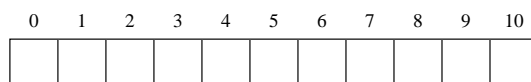
Svar: _____

Opgave 17 (4%)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *kvadratisk hashing* ser ud efter at elementerne 4, 5, 2, 0, 15, 8 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er

$$h(k, i) = (h'(k) + i + i^2) \bmod 11$$

$$h'(k) = 3k \bmod 13$$

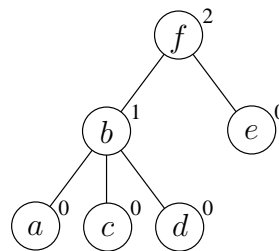


Svar: _____

Opgave 18 (4%)

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering. Angiv for hver knude rangen af knuden.

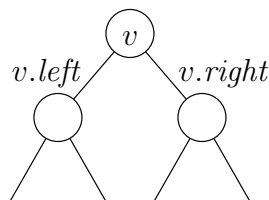
makeset(*a*)
makeset(*b*)
makeset(*c*)
makeset(*d*)
makeset(*e*)
makeset(*f*)
union(*a*,*b*)
union(*c*,*a*)
union(*c*,*d*)
union(*e*,*f*)
union(*d*,*e*)



Svar: _____

Opgave 19 (4%)

Betragt et søgetræ hvor hver knude *v* gemmer en værdi *v.x* og en farve *v.color*, og knuderne er ordnet venstre-mod-højre efter stigende værdi *v.x*. I hver knude gemmes desuden en boolsk variabel *v.mono* der angiver om alle knuder i *v*'s undertræ har samme farve som *v*. Angiv hvorledes *v.mono* kan beregnes når den tilsvarende information er kendt ved de to børn *v.left* og *v.right* (det kan antages at disse begge eksisterer).



Svar $v.mono = \underline{v.left.mono \wedge v.right.mono \wedge v.left.color = v.color \wedge v.right.color = v.color}$

Transitionssystem PlusMinus Konfigurationer: $\{[m, n] \mid \text{ikke-negative heltal } m, n\}$ $[m, n] \triangleright [m - 1, n + 2] \quad \text{if } m \geq 1$ $[m, n] \triangleright [m + 1, n - 3] \quad \text{if } n \geq 3$
--

Opgave 20 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem PlusMinus. Startkonfigurationen antages at være $[N, 0]$ hvor $N \geq 0$.

	Ja	Nej
$m + n \leq N$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$m \leq N$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$n \leq N$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$2m + n \leq 2N$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$m + n = N$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Opgave 21 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem PlusMinus.

	Ja	Nej
$\mu(m, n) = m + n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(m, n) = 5m + 2n$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(m, n) = 7m + 3n$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(m, n) = 3m + n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(m, n) = m$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Algoritme Multiply7(n)
Inputbetingelse : Heltal $n \geq 0$
Outputkrav : $r = 7n$
Metode : $x \leftarrow n$;
 $r \leftarrow 0$;
 { I } **while** $x > 0$ **do**
 $x \leftarrow x - 1$;
 $r \leftarrow r + 7$

Opgave 22 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Multiply7.

	Ja	Nej
$r = 7n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$r < 7n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$n - x = 7r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$7x + r = 7n$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x \geq 0$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 23 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Multiply7.

	Ja	Nej
$\mu(n, x, r) = x$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, x, r) = n - r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(n, x, r) = 8n - r$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, x, r) = 7(n - x) - r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(n, x, r) = 7n - r$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 24 (4%)

Givet ikke-negative heltal m og n , så beregner nedenstående algoritme produktet mn . For at vise gyldigheden af algoritmen skal I være en invariant omkring variablerne i , j og r . Angiv en invariant hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianten kræves ikke).

Algoritme Multiply(n)
Inputbetingelse : Heltal $m \geq 0 \wedge n \geq 0$
Outputkrav : $r = mn$
Metode : $i \leftarrow m$;
 $j \leftarrow n$;
 $r \leftarrow 0$;
{ I } **while** $i > 0$ **do**
 if i ulige **then**
 $i \leftarrow i - 1$;
 $r \leftarrow r + j$
 else
 $i \leftarrow i/2$;
 $j \leftarrow j + j$

Svar I : $0 \leq i \wedge r + ij = mn$

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ : i

Opgave 25 (4%)

Antag vi ønsker at gemme en mængde af n tal vha. hashing med linear probing i et array af størrelse N . Vi garanterer at arrayet altid er mellem $1/4$ og $3/4$ fyldt. Hvis der bliver færre end $N/4$ eller flere end $3N/4$ tal i mængden genindsætter vi alle tal i et nyt array af størrelse $2n$, dvs. det nye array er $1/2$ fyldt. Angiv en potentiale funktion hvormed man kan vise at det totale antal genindsættelser i hashtabellerne er amortiseret $O(1)$ per indsættelse og slettelse i mængden.

Svar $\Phi = 4|\frac{N}{2} - n|$