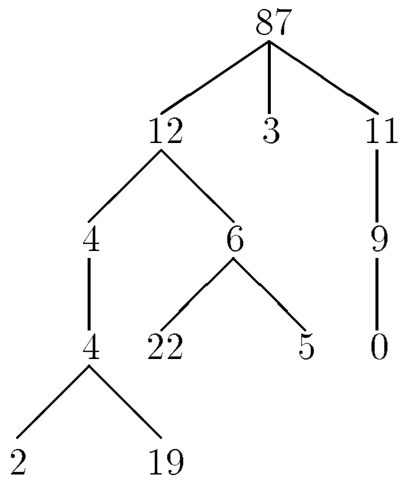
Opgave 1 (20%)

Betragt følgende definition af et træ:

Type Tree = **Prod**(val: Int, succ: **List**(Tree))

Vi definerer ***ubalancen*** af et træ som absolutværdien af forskellen mellem længderne af den korteste og længste vej fra roden til et blad. Eksempelvis har træet:



således ubalance 3, fordi den længste vej (vejen til 2 eller 19) har længde 4 og den korteste vej (vejen til 3) har længde 1.

Skriv en TRINE-værdiprocedure:

Proc UB[T: Tree] → (Int)

der beregner ubalancen af træet T. Der lægges vægt på, at besvarelsen er letlæselig, detaljeret og korrekt.

Opgave 2 (20%)

Betragt følgende grammatik:

$$\mathrm{D} \quad ::= \quad \mathtt{0D1} \;\mid\; \mathrm{D}^*$$

I det følgende betegner t en variabel af type Text og $\#_0(t)$ (henholdsvis $\#_1(t)$) betegner antallet af 0'er (henholdsvis 1'er) i t.

Det kan uden bevis benyttes, at tegnfølgen t frembringes af grammatikken ovenfor, hvis og kun hvis der gælder:

$$\mathrm{P}(t): \quad (t \in \{0,1\}^*) \ \wedge \ (\#_0(t) = \#_1(t)) \ \wedge \ \mathrm{MON}(t)$$

hvor vi videre har:

$$\mathrm{MON}(t): \quad \forall i \in 0..|t|: \ \#_0(t(0..i)) \leq \#_1(t(0..i))$$

a) Hvad er den intuitive betydning af prædikatet $\mathrm{P}(t)$?

Vi skal skrive en algoritme, der genkender tekster genereret af grammatikken.

Algoritme: Dyck
Stimulans: t: Text
Respons: ok: Bool, ok $= \mathrm{P}(t)$
Metode: $i := 0$
≪initialiser f og ok≫
do { $(f = \#_0(t(0..i)) - \#_1(t(0..i))) \wedge$
ok $\Leftrightarrow (\mathrm{MON}(t(0..i)) \wedge \ (t(0..i) \in \{0,1\}^*)) \wedge$
$(0 \leq i \leq |t|)$ }
$i < |t| \rightarrow$
≪opdater f og ok≫
$i := i+1$
od
≪afslut ok≫

b) Konkretiser ≪initialiser f og ok≫, ≪opdater f og ok≫ og ≪afslut ok≫ så algoritmen bliver gyldig, terminerende og korrekt. Bevis, at dette er tilfældet.

Opgave 3 (25%)

I folkeskolens 7. klasse analyserer man samlinger af heltal, ved at beregne ***gennemsnit***, ***median*** og ***typetal***. Lad $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$ være en ikke-tom samling af heltal. Gennemsnittet er defineret på sædvanlig vis:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

medianen er det "midterste" tal, det vil sige det tal x_m, for hvilket:

$$|\{i \mid x_i < x_m\}| \ < \frac{n}{2} \leq \ |\{i \mid x_i \leq x_m\}|$$

og typetallet er det hyppigst forekommende, det vil sige det tal x_t, for hvilket:

$$\forall k : 1 \leq k \leq n : |\{i \mid x_i = x_t\}| \ \geq \ |\{i \mid x_i = x_k\}|$$

Der skal konstrueres en box Analyse med følgende udseende:

> **Box** Analyse
> **Type** A = ≪sæk af heltal≫
> **Proc** Init[a: A] (x: Int)
> **Proc** Insert[a: A] (x: Int)
> **Proc** Gennemsnit[a: A] → (Real)
> **Proc** Median[a: A] → (Int)
> **Proc** Typetal[a: A] → (Int)
> **end** Analyse

Init skaber en sæk med kun et element, Insert udvider sækken, og Gennemsnit, Median og Typetal beregner de ovenfor definerede værdier på den aktuelle sæk.

Angiv en implementation af typen A, så **Init**[a](x) har tidskompleksitet i $O(1)$, **Insert**[a](x) og **Median**[a] har tidskompleksiteter i $O(\log |a|)$, og **Gennemsnit**[a] og **Typetal**[a] har tidskompleksiteter i $O(1)$.

Opgave 4 (15%)

Betragt følgende TRINE program.

```
        (+ Type A = Prod(x: B, y: Int)
           Type B = Prod(x: C, y: Real)
           Type C = Prod(x: A, y: Bool)

           Var a: A
           Var b: B

(*1*)      a := A(B(C(A(B(C(?-A, false), 87), 87), 87=87), 87), 87)
(*2*)      b := A(?-B, 87)
(*3*)      a.x.x.x.x.x.x.x.x.x.x.x.y := a.x.x.x.x.x.y
(*4*)      a.x.x.x.y := a.x.x.x.x.x.x.y
        +)
```

Angiv for hver af sætningerne `(*1*)`, `(*2*)`, `(*3*)` eller `(*4*)` om de vil give anledning til fejl fra TRINE oversætteren? Begrund dine svar.

Opgave 5 (20%)

Det er klart, at medianen af en sorteret liste $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ er elementet med indeks $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Det kan derfor trivielt beregnes i konstant tid.

I denne opgave betragter vi to sorterede lister A og B, begge af længde n. Vi ønsker at beregne medianen af deres forening (hvor dubletter ikke bliver fjernet). Den oplagte algoritme er at flette de to sorterede lister i tid $O(n)$ og derefter at returnere det midterste element. Vi ønsker at løse opgaven mere effektivt.

a) Skitsér en rekursiv procedure som finder medianen af foreningen af to sorterede lister A og B. (Vink: sammenlign det midterste element af A med det midterste element af B og opnå et tilsvarende problem af halv størrelse).

b) Opstil en rekursionsligning for procedurens udførselstid og angiv dens løsning.