Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer (dADS)

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Tirsdag den 13. august 2002, kl. 9.00–13.00

Opgave 1 (25%)

Betragt følgende algoritme, som kvadrerer et positivt heltal ved udelukkende at anvende addition, subtraktion og halvering af lige tal.

Algoritme : Kvadrering

Input : heltal $A \geq 1$
Output : $r = A^2$
Metode : $a \leftarrow 1$; $b \leftarrow 0$; $c \leftarrow 0$; $x \leftarrow A$;

$\{ A^2 = ax^2 + bx + c \ \wedge \ x \geq 1 \}$
while $x > 1$ **do**
  if x er lige **then**
    $a \leftarrow a + a + a + a$;
    $b \leftarrow b + b$;
    $x \leftarrow x/2$
  else
    $c \leftarrow c + a + b$;
    $b \leftarrow b + a + a$;
    $x \leftarrow x - 1$
$r \leftarrow a + b + c$

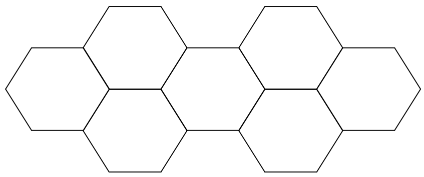
Spørgsmål a: Angiv hvilke bevisbyrder der skal eftervises i et gyldighedsbevis for algoritmen. □

Spørgsmål b: Eftervis bevisbyrderne fra spørgsmål **a**, og argumenter for at algoritmen er korrekt. □

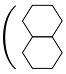
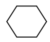
Spørgsmål c: Hvad er udførselstiden for algoritmen? □

Opgave 2 (25%)

Betragt følgende graf — en såkaldt $H(2)$-graf —



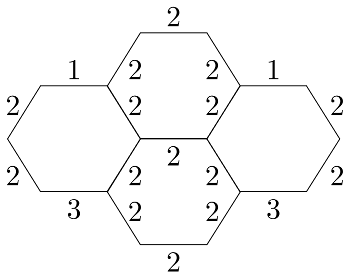
,

som består af 2 dobbelt-sekskanter () omgivet af 3 enkelt-sekskanter ().

Dette er et specialtilfælde af de mere generelle $H(k)$-grafer, som består af k dobbelt-sekskanter omgivet af $k+1$ enkelt-sekskanter.

Spørgsmål a: Angiv – udtrykt ved k – antallet af knuder og kanter i en $H(k)$-graf. □

Betragt nu en *vægtet* $H(k)$-graf, hvor de vandrette kanter i enkelt-sekskanterne har vægt 1 (øverst) og 3 (nederst), og hvor alle andre kanter i såvel enkelt- som dobbelt-sekskanterne har vægt 2. Eksempelvis har $H(1)$-grafen vægtet på denne måde følgende udseende



.

Spørgsmål b: Tegn en sådan vægtet $H(2)$-graf og angiv et letteste udspændende træ for grafen. □

Spørgsmål c: Angiv vægten af et letteste udspændende træ for en sådan vægtet $H(k)$-graf. Argumenter for svaret. (Vink: Husk at for en sammenhængende graf med n knuder indeholder et letteste udspændende træ $n-1$ kanter). □

Lad $N > 3$ være et vilkårligt heltal og betragt vægtede $H(k)$-grafer hvor alle øvre vandrette kanter i enkelt-sekskanterne har vægt 1 og alle de nedre vandrette kanter i enkelt-sekskanterne har vægt N (N erstatter 3), og hvor alle andre kanter i grafen har vægte der er strengt større end 1 og strengt mindre end N (vægtene kan være forskellige).

Spørgsmål d: Angiv en algoritme med udførselstid lineær i grafens størrelse, der finder et letteste udspændende træ for en sådan graf. Argumenter for at algoritmen er korrekt. Antag at grafen som sædvanligt er givet ved en *adjacency list* repræsentation. □

Opgave 3 (25%)

I denne opgave betragter vi mængder af tal hvor hvert tal enten er blåt eller gult. For en mængde af n tal $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, er $[x_i, x_j]$ et *maksimalt blåt interval* hvis $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ alle er blå og x_{i-1} er gult eller $i = 1$, og x_{j+1} er gult eller $j = n$. Tilsvarende defineres maksimale gule intervaller. *Spændvidden* af et maksimalt interval $[x_i, x_j]$ er differencen $x_j - x_i$. Bemærk at et maksimalt interval, der kun indeholder ét element, har spændvidde 0.

Spørgsmål a: Angiv de i alt 6 maksimale blå og gule intervaller for mængden,

$$\{\,1, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, 8, \overline{9}, \overline{13}, 14, 18, 29, 31, \overline{42}, \overline{57}, \overline{59}, \overline{63}\,\}\ ,$$

hvor $\overline{x_i}$ angiver at x_i er blåt. Angiv også spændvidderne af de seks maksimale intervaller. □

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme, der givet en sorteret liste af n blå og gule tal kan finde de maksimale blå og gule intervaller i tid $O(n)$. □

Vi ønsker nu at vedligeholde en mængde af farvede tal under følgende operationer.

INSERT(x, c) : Indsæt tallet x i mængden og giv det farven c.

DELETE(x) : Slet tallet x fra mængden.

COUNT$()$: Returner antal maksimale intervaller (både blå og gule) i mængden.

Spørgsmål c: Beskriv en datastruktur, der understøtter INSERT og DELETE i tid $O(\log n)$ og COUNT i tid $O(1)$, hvor n betegner antal tal i mængden før operationen udføres. □

Spørgsmål d: Beskriv hvorledes datastrukturen kan udvides så den understøtter en operation SUM der returnerer summen af spændvidderne af de maksimale intervaller i tid $O(1)$. □

Opgave 4 (25%)

I denne opgave antager vi at n og S er positive heltal, og at $C_1, C_2, \ldots, C_n$ er mængder af positive heltal, hvor hver mængde højest indeholder S positive heltal. Vi ønsker at afgøre om vi kan udtage ét element fra hver mængde således at deres sum er S, dvs. om der findes n elementer, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hvor $x_i \in C_i$, således at $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$.

Betragt følgende udsagn for $0 \leq k \leq n$ og $0 \leq s \leq S$:

$$U(k,s) : \text{Der findes } x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k \text{ således at } \sum_{i=1}^{k} x_i = s.$$

Spørgsmål a: Lad $n = 3$, $S = 7$, $C_1 = \{1,2,4\}$, $C_2 = \{2,3,5\}$, og $C_3 = \{3,4\}$. Udfyld nedenstående tabel med sandhedsværdierne for $U(k,s)$ for $0 \leq k \leq n$ og $0 \leq s \leq S$.

$k \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								

□

Det påstås, at $U(k,s)$ opfylder følgende rekursionsformel.

$$U(k,s) = \begin{cases} \textbf{True} & \text{hvis} \quad (k = 0) \wedge (s = 0) \\ \textbf{False} & \text{hvis} \quad (k = 0) \wedge (s > 0) \\ \textbf{True} & \text{hvis} \quad (k > 0) \wedge \text{der findes}\, y \in C_k : (y \leq s) \wedge U(k-1, s-y) \\ \textbf{False} & \text{ellers} \end{cases}$$

Spørgsmål b: Argumenter for denne påstand. □

Spørgsmål c: Angiv en algoritme, baseret på dynamisk programmering, der givet $C_1, C_2, \ldots, C_n$ og S beregner værdien $U(n,S)$. Argumenter for algoritmens udførselstid. □