Opgave 8

I denne opgave betragtes arrays, hvis elementer er *cifre*, det vil sige arrays af formen

$$X = (1, 2, 5, 3, 7, 8, 2, 0, 5, 8, 9, 6, 8, 9, 8)$$

Et *monotont afsnit* i et sådant array er et delarray hvori værdierne er ikke aftagende; fx er $X[3..5] = (3, 7, 8)$ et monotont afsnit i X, mens $X[1..3] = (2, 5, 3)$ ikke er et monotont afsnit. Vi betegner med $\mathrm{llma}(X)$ længden af det længste monotone afsnit i X, og med $\mathrm{lsma}(X)$ længden af det sidste monotone afsnit i X. For ovenstående X er $\mathrm{llma}(X) = 4$ og $\mathrm{lsma}(X) = 1$.

a) Argumenter for at følgende algoritme er korrekt (find blandt andet en passende invariant og bevis, at den er gyldig).

Algoritme længsteMonotoneAfsnit(X):
Input: Array X med længde n
Output: længden af længste monotone afsnit $r = \mathrm{llma}(X)$.

$r \leftarrow 1;\ h \leftarrow 1;\ i \leftarrow 1$
while $i \neq |X|$ **do** $\{I\}$
  if $X[i-1] \leq X[i]$ **then**
    $h \leftarrow h + 1$
  else
    $h \leftarrow 1$
  if $h > r$ **then**
    $r \leftarrow h$
  $i \leftarrow i + 1$

I stedet for et monotont afsnit i et array kan man interessere sig for en *monoton følge* i array'et, hvor en følge adskiller sig fra et afsnit ved, at dens elementer ikke behøver "af hænge sammen". Følgen

$$(2, 3, 5, 6, 8, 9)$$

udgør således den med understregning angivne monotone følge i

$$X = (1, \underline{2}, 5, \underline{3}, 7, 8, 2, 0, \underline{5}, 8, 9, \underline{6}, \underline{8}, \underline{9}, 8)$$

b) Konkretiser de udkommenterede ubestemte stumper, så følgende algoritme bliver gyldig og korrekt. Med llmf(X) betegner vi længden af den længste monotone følge i X, og med $\text{llmf}_d(X)$ betegnes længden af den længste monotone følge i X, hvis sidste ciffer er D.

Algoritme længsteMonotoneFølge(X):
Input: Array X med længde n
Output: længden r af længste monotone følge llmf(X).

// Initialiser i og h
while $i \neq |X|$ **do** $\{(h[d] = \text{llmf}_d(X[0..i]) \text{ for } 0 \leq d \leq 9) \wedge (0 \leq i \leq |X|)\}$
  // Iterer
// Beregn r