Opgave 41 Fibonacci

Det n'te Fibonaccital, F_n, er defineret ved:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 1 \\
F_1 &= 1 \\
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{for } n > 1.
\end{aligned}
$$

a) Bevis, at følgende algoritme er gyldig og terminerer:

Algoritme: Fibonacci(n)	
Inputbetingelse	: $n \geq 0$
Outputkrav	: $r = F_n$
Metode	: $r \leftarrow 1;\quad s \leftarrow 1;\quad i \leftarrow 0;$
	$\{I\}$while $i \neq n$ do
	$\quad r \leftarrow s;$
	$\quad s \leftarrow s + r;$
	$\quad i \leftarrow i + 1$

– hvor I er udsagnet $(r = F_i) \wedge (s = F_{i+1}) \wedge (0 \leq i \leq n)$.

b) Lad i det følgende R og K betegne 2×2-matricer med indgangene

$$
R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}
$$

Produktet af R og K er defineret som

$$
R \cdot K = \begin{bmatrix} r_{11}k_{11} + r_{12}k_{21} & r_{11}k_{12} + r_{12}k_{22} \\ r_{21}k_{11} + r_{22}k_{21} & r_{21}k_{12} + r_{22}k_{22} \end{bmatrix}
$$

Vis, at for ethvert $n \geq 0$, vil beregningen

$$
\begin{aligned}
&K \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\
&R \leftarrow K^n; \\
&r \leftarrow r_{11}
\end{aligned}
$$

sætte r til det n'te Fibonaccital. (Husk, at K^0 er identitetsmatricen, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

Hvordan ville du implementere denne algoritme?