Opgave 32

Vi betragter problemet Hanois Tårne. Som set ved forelæsningen kræves der mindst $2^n - 1$ enkeltflytninger for at flytte de n skiver. Argumentet er følgende induktionsargument, hvor induktionsantagelsen er

$H(n)$: der kræves $2^n - 1$ enkeltflytninger for at flytte n skiver.

<u>Basis</u>

Det er klart, at $H(1) = 1 = 2^1 - 1$.

<u>Induktionsskridt</u>

For at flytte n skiver skal vi først flytte de $n-1$ øverste over på hjælpestangen. Dette kræver iflg. induktionsantagelsen $2^{n-1} - 1$ flytninger.

Vi flytter nu den største skive til sin destination. Dette kræver 1 flytnin g.

Til slut flytter vi de $n-1$ skiver over på den største. Dette kræver igen pr. induktionsantagelse $2^{n-1} - 1$ flytninger.

Altså kræves der til flytning af n skiver

$$(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$$

dvs. $H(n)$ er bevist.

Det er nemt at skrive en rekursiv procedure

void Hanoi(**int** n, Stang a, Stang b, Stang c)

der løser problemet for n skiver.

a) Argumenter for, at der højst foretages $6n$ *forskellige* procedurekald i denne løsning.

b) Betyder det ikke, at vi med dynamisk programmering kan løse problemet i tid $O(n)$?

Ovenfor har vi lige vist, at problemet kræver tid $\Omega(2^n)$.

c) Forklar dette tilsyneladende paradoks.