Opgave 31

Givet to polynomier

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 + b_0 \end{aligned}$$

Deres produkt er følgende polynomium af grad $n + m$

$$r(x) = p(x) * q(x) = c_{n+m} x^{n+m} + c_{n+m-1} x^{n+m-1} + \ldots + c_1 + c_0$$

hvor $c_i = \sum_{j+k=i} a_j * b_k$ for $0 \leq i \leq m + n$.

a) Vis, at den oplagte måde at udregne $r(x)$ har udførelsestid i $O((n+1) \cdot (m+1))$.

b) Antag, at $n = m$ og vis, at $r(x)$ kan udregnes i tid $O(n^{\log_2 3})$. (Vink: Et heltal som f.eks. 37916 kan opfattes som "polynomiet" $3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 6$. Der er derfor en oplagt analogi mellem multiplikation af heltal og multiplikation af polynomier.)

Et polynomium kan repræsenteres på andre måder end ved sine koefficienter. Én sådan anden måde er ved sine rødder, hvor $n + 1$ tal $a, r_1, r_2, \ldots, r_n$ nu repræsenterer polynomiet

$$R(x) = a * (x - r_1) * (x - r_2) * \ldots * (x - r_n).$$

c) Konstruer en del-og-kombiner algoritme, der givet $a, r_1, \ldots, r_n$ beregner koefficienterne i $R(x)$. Hvad er algoritmens udførelsestid? (Hvis algoritmen udføres med stimuli $2, 2, 3$, skal den returnere $2, -10, 12$ fordi

$$R(x) = 2 * (x - 2) * (x - 3) = 2x^2 - 10x + 12$$