Opgave 23

Den *transitive* og *refleksive lukning* af en orienteret graf $G = (V, E)$ er grafen $G^t = (V, E^t)$, hvor $(v, w) \in E^t$, hvis $v = w$ eller der findes en vej i G fra v til w (bemærk at vi her tillader en kant at forbinde en knude med sig selv).

a) En incidensmatrix for en graf med n knuder er en n∗n Boolsk matrix hvis (i,j)-te indgang er true (false) hvis der (ikke) findes en kant fra knude i til knude j. Angiv incidensmatricen G_0 for grafen i figur 9.10 a) i [G&T].

b) Angiv $G_0 * G_0$, hvor $*$ er *Boolsk matrixmultiplikation*, der defineres som følger. Hvis A og B er $n * n$ Boolske matricer, er

$$A * B = C$$

hvor

$$C_{ij} = \bigvee_{k=0}^{n-1} a_{i,k} \wedge B_{k,j}$$

c) Observer, at det (i, j)'te element i $G_0 * G_0$ har værdien t hvis og kun hvis der findes en vej af længde præcis 2, der går fra i til j.

d) Vis, at der for enhver orienteret graf med incidensmatrix G_0 gælder, at incidensmatricen for dens transitive og refleksive lukning er givet ved

$$G_0^t = I \vee G_0 \vee G_0^2 \vee \ldots \vee G_0^{n-1} = (I \vee G_0)^{n-1}$$

hvor I er enhedsmatricen dvs.

$$I = \begin{bmatrix} t & & & & & \\ & t & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & t \end{bmatrix}$$

e) Angiv en algoritme, der givet G_0 finder G_0^t. Angiv udførelsestiden.