DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 6 (seks)
Eksamensdag: Mandag den 11. august 2008, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Willemoesgade 15, 8200 Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Oplysninger til eksamensadministrationen
vedrørende opgavepakke fra **Datalogisk Institut**

dato: kl.

Antal indlagte opgaver **15**

Evt. faglærer der vil være til stede ved eksamens begyndelse ______

Navn og tlf. på "vagthavende faglærer" under eksamen **Gerth S. Brodal, 5059 5432**

Opgavebesvarelserne:
- [x] 1) afhentes i eksamenslokalet ved eksamens afslutning
- [ ] 2) afhentes i administrationen den følgende morgen
- [ ] 3) ønskes sendt til ______

Navn på den/de person(er), der er bemyndiget til at afhente/modtage opgavebesvarelserne ______

Forbeholdt eksamensadministrationen:

Opgave modtaget:

DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

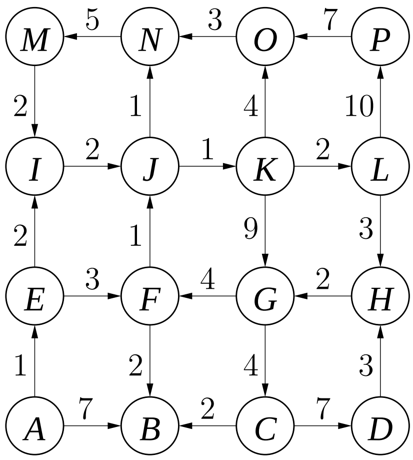
Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 6 (seks)
Eksamensdag: Mandag den 11. august 2008, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Willemoesgade 15, 8200 Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Betragt nedenstående orienterede graf med ikke-negative vægte på kanterne. Det antages af incidenslisterne er sorteret leksikografisk.



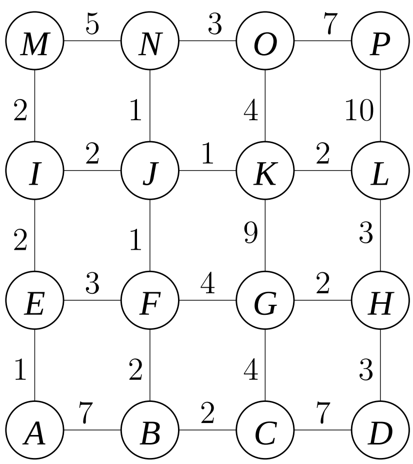
Spørgsmål a: Angiv resultatet af et BFS gennemløb for ovenstående graf, når BFS gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS træet og BFS numrerne for knuderne. □

Spørgsmål b: Angiv resultatet af et DFS gennemløb for ovenstående graf, når DFS gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i DFS træet og for hver knude "discovery time" og "finishing time". □

Spørgsmål c: Angiv et kortest veje træ for ovenstående graf, når kortest veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. For hver knude angiv også afstanden til startknuden A. □

Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. □

Betragt nu følgende uorienterede graf med vægte på kanterne.

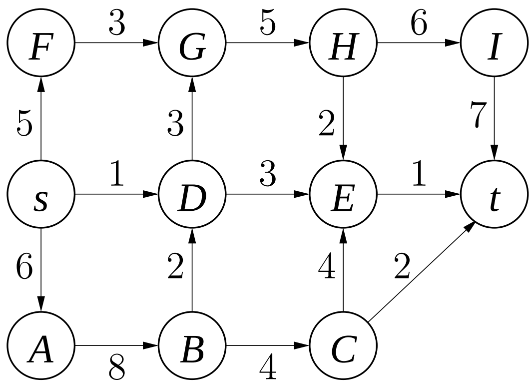


Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ for ovenstående graf. □

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 2 (15%)

Betragt nedenstående netværk med de angive kapaciteter på kanterne.

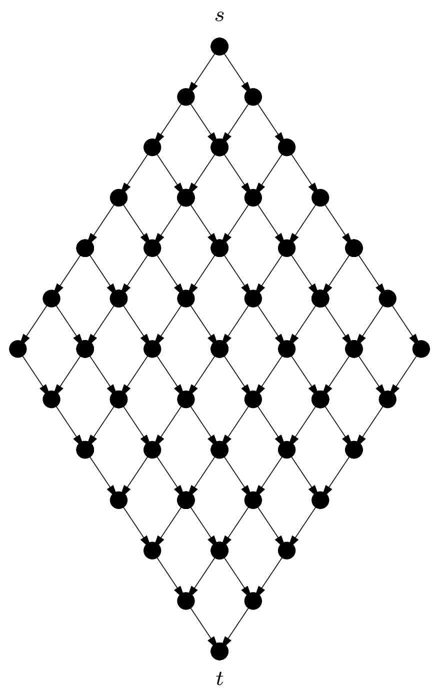


Spørgsmål a: Angiv en maximal strømning fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv størrelsen af en maximal strømning, og angiv et snit (d.v.s. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig den maximale strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maximal strømning. Angiv de forbedrende stier der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen man forbedrer med langs stien. □

Opgave 3 (20%)

I denne opgave betragter vi k-*diamant-grafer*. En k-diamant-graf består af $2k-1$ rækker af knuder, med henholdsvis $1, 2, 3, \ldots, k-1, k, k-1, \ldots, 3, 2, 1$ knuder. Den j'te knude i række i har orienterede kanter til den j'te og $j+1$'te knude i række $i+1$ - såfremt disse knuder eksisterer. Den øverste knude betegnes s og den nederste knude t. Eksemplet nedenfor viser en 7-diamant-graf.



Spørgsmål a: Angiv antal knuder n og kanter m i en k-diamant-graf som funktion af k. Angiv udførselstiden for Dijkstra's algoritme for at løse korteste veje problemet på en positiv vægtet k-diamant-graf som funktion af k. □

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der finder en korteste vej fra s til t i en positiv vægtet k-diamant-graf i tid $O(m)$. □

Spørgsmål c: Angiv en algoritme der finder *to knude-disjunkte veje fra s til t* (dvs. to stier der forbinder s og t, men kun har knuderne s og t til fælles) i en positiv vægtet k-diamant-graf, hvor de to stier til sammen har *mindst mulig samlet vægt*. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 4 (20%)

Lad $X = x_1, \ldots, x_n$ og $W = w_1, \ldots, w_n$ være sekvenser af længde n, hvor der til hvert element x_i er knyttet en positiv vægt w_i.

I denne opgave ønsker vi at finde en voksende delsekvens af X som har maximal vægt. Det vil sige at vi ønsker at finde en delsekvens $i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell$ af positionerne, hvor $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_\ell}$ og summen $w_{i_1} + w_{i_2} + \ldots + w_{i_\ell}$ er størst mulig.

For eksempel er den maksimale vægt af en voksende delsekvens i nedenstående eksempel 9.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	6	8	7	$\underline{5}$	3	$\underline{9}$	4	$\underline{10}$	5
w_i	1	1	2	$\underline{4}$	1	$\underline{1}$	2	$\underline{4}$	3

Vi lader $MEH(i)$ betegne *den maksimale vægt af en voksende delsekvens, hvor x_i er det sidste element i delsekvensen.*

$MEH(i)$ kan beskrives ved følgende rekursionsformel:

$$MEH(i) = \begin{cases} w_i + \max\{MEH(j) \mid 1 \leq j < i \wedge x_j < x_i\} & \text{hvis der findes } 1 \leq j < i \wedge x_j < x_i \\ w_i & \text{ellers} \end{cases}$$

Spørgsmål a: Udfyld nedstående tabel for $MEH(i)$ for ovenstående eksempel.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$MEH(i)$									

□

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet sekvenser X og W af længde n, finder en voksende delsekvens af X som har maximal vægt. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til, givet sekvenser X og W af længde n, at rapportere en voksende delsekvens af X, der har maksimal vægt. Angiv algoritmens udførselstid. □

Opgave 5 (20%)

I det følgende betragter vi en streng S af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn. Desuden er vi givet et heltal k, hvor $1 \leq k \leq n$.

Vi ønsker at finde en delstreng U af S således at U har længde højest k, og således at forekomsterne af U i S dækker flest mulige tegn i S.

For eksempel hvis $S = \texttt{DBCDCDCB}$ og $k = 4$, så dækker de to forekomster af $U = \texttt{CDC}$ i S tilsammen 5 tegn.

Spørgsmål a: Angiv for strengen

$$S = \texttt{ABABACABADABABAD},$$

en delstreng U af længde højst 5, der dækker flest mulige tegn i S. Angiv U og antallet af tegn i S som dækkes af U. □

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der givet en streng S af længde n og et heltal k, finder en delstreng U af længde højest k, som dækker flest mulige tegn i S. Angiv algoritmens udførselstid som funktion af k og n. □